ENCICLOPÉDIA
sobre o Desenvolvimento
na Primeira Infância



Operações com números

Atualização Fevereiro 2013
Editor do Tema:
Jeff Bisanz, PhD, University of Alberta, Canadá

©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

Índice

Síntese 5

Ensino da matemática para crianças em idade pré-escolar 9
JODY L. SHERMAN-LEVOS, PHD, JULHO 2010

Promover o ensino precoce das operações numéricas nas creches e pré-escolas 15
ARTHUR J. BAROODY, PHD, JULHO 2010

Conhecimento numérico na primeira infância 25
CATHERINE SOPHIAN, PHD, JUNHO 2009

Habilidades iniciais em operações com números: a transição dos primeiros meses de vida até a primeira infância 32
KELLY S. MIX, PHD, JUNHO 2010

Preditores iniciais do bom desempenho e de dificuldades de aprendizagem em matemática 39
NANCY C. JORDAN, PHD, JUNHO 2010

Trajetórias de aprendizado da matemática na primeira infância: sequências de aquisição e de ensino 46
DOUGLAS H. CLEMENTS, PHD, JULIE SARAMA, PHD, JULHO 2010

©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

Tema financiado por:



©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

Síntese

Qual é sua importância?

Às vezes, a *numeracia* é definida como a compreensão de como os números representam grandezas específicas. Essa compreensão se traduz em uma variedade de habilidades e de conhecimentos (por exemplo, saber contar, fazer a distinção entre conjuntos com quantidades diferentes, fazer operações como somas e subtrações), de modo que a palavra “numeracia” é muitas vezes utilizada para se referir a uma ampla gama de conceitos e de habilidades relacionados a números. Em geral, essas habilidades *aparecem* sob uma forma qualquer muito antes da entrada na escola. A ideia de expor as crianças pequenas ao *ensino da matemática na primeira infância (EMPI)* existe há mais de um século, porém as discussões atuais giram em torno dos objetivos do ensino precoce das operações numéricas e dos métodos a utilizar para alcançar esses objetivos. O *aprendizado precoce da matemática* pode e deve fazer parte integrante das atividades diárias das crianças por meio de contatos com motivos geométricos, quantidades e espaços. Oferecer às crianças muitas oportunidades, adaptadas a seu desenvolvimento, para *exercer suas competências* em matemática pode fortalecer a ligação entre as habilidades precoces das crianças em matemática e a aquisição de conhecimentos em matemática na escola. Infelizmente, nem todas as crianças têm as *mesmas oportunidades* para exercer essas competências, daí a importância do EMPI. As pesquisas sobre a numeracia e as habilidades precoces em matemática desempenham um papel importante na elaboração do programa e dos objetivos do EMPI.

As dificuldades em matemática são relativamente comuns nas crianças em idade escolar. Quase *1 criança em 10* receberá um diagnóstico de distúrbio de aprendizado relativo à matemática ao longo de sua escolaridade. Uma das formas mais graves é a *discalculia desenvolvimental*, que se refere à incapacidade de contar ou de somar os elementos de um conjunto e de distinguir os números uns dos outros.

O que sabemos?

Os conhecimentos básicos em matemática aparecem na primeira infância. Aos *6 meses*, os bebês são capazes de perceber a diferença entre pequenos conjuntos de elementos com quantidades

diferentes (conjuntos de dois e três elementos) e até conseguem fazer a distinção entre quantidades maiores, desde que a razão entre os dois conjuntos seja grande o bastante (por exemplo, entre 16 e 32, mas não entre 8 e 12). Essas representações pré-verbais se tornam mais apuradas com o tempo e constituem os *fundamentos*, embora insuficientes, de seu futuro aprendizado da matemática.

Uma das realizações relativas à numeracia é a aquisição do domínio das operações. O *domínio das operações* se refere ao conhecimento necessário para fazer somas e subtrações de forma flexível, oportuna e precisa. Até os 3 anos, as *crianças pequenas* adquirem progressivamente as competências necessárias para dominar as operações, muitas vezes começando por números intuitivos (por exemplo, saber o significado de um, dois e três), ficando aos poucos capazes de perceber que, por exemplo, qualquer conjunto de três elementos tem mais elementos que um conjunto de dois elementos.

À medida que vão crescendo, as crianças desenvolvem mais habilidades com os números. Aos três anos, elas começam a serem capazes de realizar *tarefas não verbais com os objetos*, como compreender o processo de adição e de subtração, e de avaliar que um conjunto tem mais elementos que outro. Embora as *crianças em idade pré-escolar* possam associar conjuntos de dois, três e quatro elementos se os objetos tiverem um tamanho ou uma forma semelhante, elas ainda têm dificuldades quando os objetos são muito diferentes (por exemplo, combinar duas miniaturas de animais e dois pontos pretos). As crianças em idade pré-escolar são também propensas a se deixar facilmente distrair pelas *características superficiais* do conjunto (por exemplo, achar que um conjunto tem mais elementos que outro de mesmo tamanho porque os elementos estão colocados em uma fila maior). Pesquisas estão sendo realizadas para determinar como os conhecimentos relativos a quantidades na primeira infância estão ligados às *habilidades numéricas na idade pré-escolar* e ao sucesso posterior na escola.

Embora a maioria das crianças seja naturalmente capaz de descobrir conceitos matemáticos, as experiências ambientais e culturais desempenham um papel importante na promoção de seus conhecimentos sobre números. Por exemplo, a *aquisição da linguagem* permite à criança resolver problemas verbais e desenvolver sua percepção dos números (por exemplo, compreender os números cardinais, o número total de elementos em um conjunto). As crianças que não tiveram *experiências precoces* com os números tendem a ficar para trás em relação a seus pares. Por exemplo, as crianças de *famílias de baixa renda* tendem a ter poucas

competências para operações numéricas na primeira infância e essas deficiências se traduzem mais tarde na escola por dificuldades em matemática. O *desempenho* em matéria de problemas numéricos e os tipos de estratégias cognitivas utilizadas pelas crianças variam muito de uma criança para outra. Até a série de *respostas* de uma mesma criança pode variar muito de um teste para outro.

É importante promover o desenvolvimento das competências para operações numéricas na primeira infância, devido a sua relação com a preparação das crianças em matemática na hora de sua entrada na escola e depois. As crianças em idade pré-escolar capazes de contar, dar o nome dos números e fazer a distinção entre diferentes quantidades tendem a se sair melhor nas tarefas numéricas na *pré-escola*. Além disso, as boas habilidades numéricas das crianças predizem o *sucesso escolar* posterior, até mais que as competências de leitura, de concentração e as habilidades sócio emocionais.

O que pode ser feito?

Levando em conta as aptidões naturais das crianças no tocante ao aprendizado dos números, deve-se estimulá-las a *explorar e praticar livremente suas habilidades* em uma variedade de atividades não estruturadas. Essas experiências de aprendizado devem ser prazerosas e *apropriadas ao desenvolvimento*, para que as crianças continuem praticando essas atividades e não fiquem desestimuladas. Os *jogos de tabuleiro* e outras atividades envolvendo experiências com números podem ajudar as crianças a desenvolver suas competências com operações numéricas. *Materiais* como cubos, quebra-cabeças e formas estimulam também o desenvolvimento da numeracia.

Os pais podem também estimular o desenvolvimento das habilidades numéricas de seus filhos elaborando *experiências enriquecedoras* com números dentro de um contexto apropriado (por exemplo, perguntar à criança quantos pés ela tem e utilizar sua resposta para lhe explicar por que ela precisa de dois sapatos e não apenas um). Os pais e professores devem também oferecer *momentos educativos espontâneos* que incentivam as crianças a pensar em números e a falar deles. Os números podem ser introduzidos em *várias áreas*, incluindo as brincadeiras (jogos de dados), a arte (desenhar certa quantidade de estrelinhas) e a música (manter um ritmo de duas ou três batidas).

Enxergar as coisas do ponto de vista das crianças e entender que sua interpretação dos problemas matemáticos é *diferente* daquela dos adultos constituem também aspectos importantes de uma educação eficiente. Os professores devem entender que a aquisição de competências para as operações numéricas segue um *processo desenvolvimental* e que, portanto, as atividades numéricas devem ser elaboradas em consequência. Para otimizar as intervenções focadas nas operações numéricas, é preciso fazer uma *detecção logo na pré-escola* para assegurar-se de que as crianças sejam capazes de reconhecer a quantidade de objetos em um pequeno conjunto (2 ou 3 objetos) e de fazer a distinção entre esses conjuntos e conjuntos maiores (4 ou 5 objetos).

As intervenções precoces em matemática têm implicações importantes para a preparação para a escola. Um programa de *EMPI bem-sucedido* inclui um ambiente estimulante com objetos e brinquedos que incentivem o raciocino matemático (por exemplo, com cubos e quebra-cabeças), oportunidades de brincadeiras onde as crianças podem desenvolver e ampliar suas habilidades matemáticas naturais, e momentos reservados ao ensino onde os educadores da pré-escola fazem perguntas a respeito das descobertas matemáticas das crianças.

Ensino da matemática para crianças em idade pré-escolar

Jody L. Sherman-LeVos, PhD

University of California, Berkeley, EUA

Julho 2010

Introdução

Ensinar a matemática a crianças pequenas, antes de sua entrada na escola de primeiro grau, não é uma prática nova. Na realidade, o ensino da matemática na primeira infância (EMPI) já existe sob várias formas há centenas de anos.[1] O que mudou ao longo do tempo são as opiniões quanto aos motivos que justificam a importância do EMPI, aos objetivos que esse ensino deveria alcançar e à forma (ou a utilidade) de ensinar a matemática a um público tão jovem.

Do que se trata e contexto da pesquisa

O EMPI é necessário?

Uma preocupação de muitos especialistas da infância, incluindo educadores e pesquisadores, é a recente tendência de "estender a educação escolar às crianças pequenas".[2] Essa tendência se manifesta pela aplicação aos níveis pré-escolares de programas que eram formalmente reservados às crianças em idade escolar, com um foco sobre os resultados nas avaliações.[3] A motivação por trás dessa extensão dos programas parece ser principalmente de ordem política, com uma ênfase cada vez maior sobre o sucesso precoce, a melhoria dos resultados nos testes e a redução das diferenças entre minorias específicas e grupos socioeconômicos.[4]

Apesar da preocupação generalizada ligada à extensão dos programas de nível escolar para o nível pré-escolar, existem fatores convincentes que encorajam a presença de pelo menos algum tipo de ensino da matemática para as crianças em idade pré-escolar, ao menos para alguns grupos dessas crianças. Como ressaltam Ginsburg *et al*., aprender a matemática constitui "uma atividade 'natural' e apropriada do ponto de vista desenvolvimental para as crianças pequenas"[1]. Muitas crianças desenvolvem conceitos simples sobre espaço, quantidades, tamanhos, motivos geométricos e operações nas suas interações diárias com o mundo. Infelizmente, nem todas as crianças têm as mesmas oportunidades de elaborar esses conceitos matemáticos informais,

©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

porém, fundamentais, no seu dia-dia. De modo que – e porque a equidade constitui um aspecto tão importante do ensino da matemática – o EMPI parece especialmente relevante para as crianças que pertencem a grupos marginalizados,[3] como as crianças com necessidades especiais, aquelas que aprendem a língua nacional como segunda língua (por exemplo, o método "*English-as-additional-language* [EAL]") e as crianças de lares com baixo status socioeconômico, instáveis ou omissos.4

Resultados de pesquisas recentes

A equidade em matéria de educação é um argumento muito importante em favor do EMPI, porém um aspecto intimamente ligado à equidade é o fato de ajudar as pequenas mentes matemáticas a passar dos conceitos informais aos conceitos formais da matemática, conceitos que têm nomes, princípios e regras. O desenvolvimento dos conceitos matemáticos nas crianças se constrói muitas vezes a partir de experiências informais e pode ser representado por trajetórias de aprendizado[5] que ressaltam o modo de competências específicas em matemática se formarem a partir das experiências anteriores, e dão informações sobre as etapas seguintes. Por exemplo, aprender os nomes, a ordem e as quantidades dos "números intuitivos" um, dois e três, reconhecer esses valores como conjuntos de objetos, nomes de números e partes de um todo (por exemplo, três pode ser formado a partir de 2 e 1 ou de 1 + 1 + 1), tudo isso pode ajudar as crianças a desenvolver uma compreensão das operações simples.[6] "Matematizar" ou oferecer experiências matemáticas adequadas e enriquecê-las com um vocabulário matemático, pode ajudar a ligar a curiosidade natural e precoce das crianças e suas observações sobre a matemática aos conceitos que serão ensinados mais tarde na escola.[3] Os pesquisadores encontraram evidências sugerindo que o raciocínio matemático aparece muito cedo[1,6,7] e que o EMPI pode ajudar as crianças a formalizar conceitos precoces, estabelecer ligações com conceitos relacionados, e fornecer o vocabulário e os sistemas de símbolos necessários à comunicação e à tradução da matemática (como exemplo, ver o artigo de Baroody).[6]

O EMPI pode ser importante para além da equidade e da "matematização". Em uma análise de seis estudos longitudinais, Duncan *et al*.[8] descobriram que as competências em matemática das crianças quando de sua entrada na escola servem como indicação para futuros bons resultados acadêmicos, mais até que as competências de concentração, socioemocionais ou de leitura. Da mesma forma, dificuldades precoces no aprendizado dos conceitos básicos da matemática podem ter efeitos duradouros para toda a escolaridade das crianças. Visto que as competências em matemática são especialmente importantes para participar de maneira produtiva ao mundo

moderno (Plata L, dados não publicados, 2006)[9] e que certas áreas específicas da matemática como a álgebra podem abrir as portas do ensino superior e da escolha de uma carreira,[10] o acesso a experiências matemáticas precoces, equitativas e apropriadas reveste uma importância crucial para todas as crianças pequenas.

O que é um EMPI "apropriado"?

As opiniões divergem a respeito daquilo que deve ser o EMPI e da maneira de incuti-lo na vida das crianças em idade pré-escolar, com um continuum da quantidade de intervenções ou de ensino proposta. Numa ponta desse *continuum* tem-se uma abordagem do EMPI muito direta, didática e centrada no professor, enquanto que na outra ponta do espectro, existe uma abordagem do EMPI não didática, centrada na brincadeira e focada na criança.[4] Pode ser que crianças individuais e talvez diferentes grupos de crianças se beneficiem de diferentes níveis de ensino dentro desse *continuum*, e ainda há muita pesquisa a ser feita no intuito de entender melhor quais são as melhores práticas para todas as crianças e todos os aspectos. O "*Building Blocks*" é um exemplo de programa de aprendizado da matemática destinado a crianças pequenas baseado em pesquisas. Trata-se de um programa elaborado para apoiar e melhorar o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças (isto é, as trajetórias de aprendizado) através de jogos, vídeo, da utilização de objetos usuais (isto é, de objetos manipuláveis como cubos), e de material impresso.[11] O projeto *Building Blocks* representa uma tentativa de alinhar o conteúdo e as atividades pedagógicas com as trajetórias de aprendizado em áreas bem estudadas como a contagem. As trajetórias de aprendizado de outras áreas, como as medições e a formação de motivos geométricos, ainda não estão muito bem compreendidas.[5]

Ginsburg *et al*.[1] descreveram seis componentes que deveriam fazer parte de todas as formas de EMPI (isto é, programas como *Building Blocks*): ambiente, brincadeiras, momentos de ensino espontâneo, projetos, programa de estudos e ensino intencional. Por exemplo, qualquer que seja o lugar de um programa específico de matemática dentro do *continuum* didático-lúdico, o ambiente constitui um componente vital da educação precoce. Mais especificamente, o fato de fornecer às crianças em idade pré-escolar materiais que estimulam o raciocínio matemático, como cubos, formas e quebra-cabeças, pode facilitar o desenvolvimento de competências básicas como formar motivos geométricos, saber fazer comparações e operações numéricas desde cedo. Outro componente importante é o momento do ensino que consiste em reconhecer e capitalizar as descobertas espontâneas das crianças no campo da matemática fazendo perguntas que exigem que as crianças reflitam antes de responder, fornecendo o vocabulário e o suporte para

representá-lo, e sugerindo atividades que sejam uma extensão do ensino com maiores detalhes e apoio das ideias matemáticas.

Talvez o componente mais popular do EMPI na literatura científica atual seja a brincadeira. Muitos partidários do aprendizado por meio da brincadeira argumentam que as crianças aprendem muito quando descobrem por si mesmas ideias matemáticas em situações naturais ou minimamente inventadas.[12,13] Alguns até dizem que a brincadeira está desaparecendo das pré-escolas em consequência da adoção da educação escolar e das provas.[14] Eles apresentam dados indicando que as crianças, nos seus primeiros anos de escola (incluindo as creches) passam hoje mais tempo na preparação de provas que na prática de atividades baseadas em brincadeiras.[4] Existem até muitos brinquedos educativos no mercado, concebidos mais para promover um aprendizado precoce de conceitos acadêmicos (isto é, alfabetização inicial para bebês) do que para o aprendizado pela brincadeira em si. Em parte, essa abordagem pode ser a consequência das ideias dos pais a respeito da importância de uma educação precoce para o futuro sucesso escolar. Muitas pesquisas ainda devem ser feitas sobre o impacto dos brinquedos educativos, da tecnologia, da brincadeira (ou de sua falta) e dos diversos programas de EMPI sobre o desenvolvimento matemático das crianças em idade pré-escolar.

Lacunas da pesquisa e implicações

Quais são os obstáculos a uma educação precoce eficaz?

Diversos fatores complicam o ensino da matemática para as crianças em idade pré-escolar, incluindo a pressão política (isto é, resultados escolares, financiamento, diversas normas de programas), diferenças individuais entre as crianças (isto é, no nível individual, as crianças podem aproveitar diferentes oportunidades no tocante à matemática), diferenças ideológicas a respeito da educação (isto é, o *continuum* lúdico-didático) e lacunas nas pesquisas sobre o desenvolvimento (isto é, trajetórias de aprendizado pouco documentadas para certos conceitos matemáticos). Outros obstáculos complicam também o EMPI, que afetam a implementação do ensino da matemática (independente do programa), como os temores dos professores ou suas interpretações erradas da matemática. Infelizmente, muitos educadores de pré-escola carecem de uma formação diretamente ligada ao ensino da matemática para crianças pequenas (Plata L., dados não publicados, 2006). Os professores precisam de informações sobre aquilo que as crianças sabem, informações sobre a forma das crianças aprenderem novos conceitos, informações sobre as estratégias de ensino mais eficazes, e sobre os próprios conceitos

matemáticos (Plata L., dados não publicados, 2006).[3] Melhorar as oportunidades de formação em matemática dos educadores das pré-escolas pode ajudar a melhorar a qualidade (e a quantidade) do ensino da matemática para crianças pequenas.

Conclusão

O debate em torno do EMPI não parece ser de saber se a exposição precoce às experiências e ideias da matemática é importante; o consenso geral é que ele é de fato importante. A questão é mais de saber como, quando, por que e para quem deveriam ser apresentadas abordagens específicas do EMPI. As opiniões divergem no que diz respeito à quantidade de brincadeiras livres *versus* estruturadas, ou a um programa curricular específico *versus* momentos de ensino. Apesar de tudo, como as evidências relativas ao desenvolvimento das ideias matemáticas em crianças muito jovens (isto é, as trajetórias de aprendizado) vão se acumulando, as tentativas de alinhar o desenvolvimento cognitivo com as melhores práticas de ensino (ou com os melhores ambientes para favorecer as descobertas matemáticas naturais) poderiam ajudar a pavimentar o caminho para experiências matemáticas equitativas e apropriadas para todas as crianças em idade pré-escolar.

Referências

1. Ginsburg HP, Lee JS, Boyd JS. Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report* 2008;223-23.
2. Elkind D. Foreword. In: Miller E, Almon J, eds. *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in schoo*l. College Park, MD: Alliance for Childhood; 2009: 9.
3. Clements DH. Major themes and recommendations. In: Clements DH, Sarama J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 7-72.
4. Miller E, Almon J, eds. *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in school*. College Park, MD: Alliance for Childhood; 2009:1-72.
5. Clements DH, Sarama J. Learning trajectories in early mathematics – sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network; 2009: 1-7.
6. Baroody AJ. Fostering early numeracy in preschool and kindergarten. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network; 2009: 1-9.
7. Sophian C. Numerical knowledge in early childhood. In: Tremblay RE, Barr RG, Peters RDeV, Boivin M, eds. *Encyclopedia on Early Childhood Development* [online]. Montreal, Quebec: Centre of Excellence for Early Childhood Development; 2009:1-7.
8. Duncan GJ, Dowsett CJ, Claessens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology* 2007;43:1428-1446.
9. Baroody AJ, Lai M, Mix KS. The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In: Spodek B, Olivia S, eds. *Handbook of research on the education of young children*.

Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc; 2006:187-221.

10. Knuth EJ, Alibali MW, McNeil NM, Weinberg A, Stephens AC. Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 2005;37:1-9.12.

11. Sarama J. Technology in early childhood mathematics: Building Blocks as an innovative technology-based curriculum. In: Clements DH, Saram J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 361-375.

12. Polonsky L, Freedman D, Lesher S, Morrison K. *Math for the very young: A handbook of activities for parents and teachers*. New York, NY: John Wiley & Sons; 1995.

13. Seo K, Ginsburg HP. What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lesson from new research. In: Clements DH, Saram J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 91-104.

14. Hirsh-Pasek K, Golinkoff RM, Berk LE, Singer DG. *A mandate for playful learning in preschool: Presenting the Evidence*. Oxford, UK: University Press; 2009

Promover o ensino precoce das operações numéricas nas creches e pré-escolas

Arthur J. Baroody, PhD

College of Education, University of Illinois at Urbana-Champaign, EUA

Julho 2010

Introdução

Há muito tempo, a melhor maneira de ajudar os alunos a aprender as operações de adição básica com um dígito, como 3+4=7 e 9+5=14, e as operações de subtração relacionadas, como 7–3=4 e 14–9=5, já é objeto de debates (ver, por exemplo, Baroody & Dowker,[1] especialmente os capítulos 2, 3, 6 e 7). Entretanto, existe uma concordância geral de que as crianças devem conseguir dominar as operações.[2] O domínio das operações implica saber fazer somas e diferenças de forma eficaz (com rapidez e precisão) e aplicar esses conhecimentos de forma apropriada e flexível. Ao longo das quatro últimas décadas, ficou cada vez mais claro que os conhecimentos matemáticos do dia-dia (informais) das crianças constituem uma base importante para o aprendizado da matemática na escola (formal).[3,4,5] Por exemplo, as pesquisas indicam que o fato de ajudar as crianças a desenvolver sua percepção dos números pode promover o domínio das operações.[6,7,8,9] O objetivo do presente artigo é o de resumir como o desenvolvimento de uma percepção informal dos números antes de completar o primeiro ano do ensino fundamental fornece as bases da habilidade chave formal de dominar as operações nos primeiros anos de escola primária.

Questões-chave de pesquisa

1. Em que momento os pais e educadores da primeira infância devem iniciar: (a) o processo de promoção da percepção dos números, e (b) os esforços para estimular diretamente o domínio das operações?
2. Quais são os pré-requisitos desenvolvimentais que as crianças das creches e das pré-escolas devem aprender para conseguir dominar as operações de forma eficaz?
3. Qual é o papel da linguagem no desenvolvimento desses conhecimentos fundamentais?
4. Como os pais e educadores da primeira infância podem incentivar da forma mais eficiente possível a percepção dos números e o domínio das operações?

Resultados de pesquisas recentes

Pergunta 1. O processo de ajudar as crianças a desenvolver sua percepção dos números – a base do domínio das operações – pode e deve começar durante os anos pré-escolares. Pesquisas recentes indicam que as crianças começam muito cedo a desenvolver sua percepção dos números. De fato, alguns bebês de apenas 18 meses e quase todas as crianças de 2 anos de idade já começaram a aprender os pré-requisitos desenvolvimentais para o domínio das operações (por exemplo, ver Baroody, Lai, & Mix,[3] para uma análise).

O sucesso dos esforços para estimular o domínio das operações depende de duas coisas: assegurar-se de que a criança está pronta no plano do desenvolvimento e não apressá-la. Uma vez que as pesquisas indicam que diferenças individuais importantes quanto à percepção dos números já aparecem a partir dos dois ou três anos de idade e, muitas vezes, aumentam com a idade,[3,10] não existe nenhuma regra fixa e definitiva a respeito do momento de iniciar um treinamento formal relativo ao domínio das operações. Contudo, para muitas crianças, pode acontecer que, mesmo com as somas mais simples (n+0 e n+1), essa formação não seja apropriada ao desenvolvimento antes do final da pré-escola ou do início do primeiro ano do ensino fundamental.[11] Para as crianças que correm o risco de insucesso escolar, acontece muitas vezes que mesmo as somas mais simples não façam sentido antes do primeiro ou do segundo ano do ensino fundamental.[12]

Perguntas 2 e 3. Alguns estudos indicam que a linguagem, na forma dos nomes dos primeiros números, desempenha um papel chave no desenvolvimento da percepção dos números (para uma discussão detalhada, ver Baroody;[3] Mix, Sandhofer, & Baroody[13]). Mais especificamente, ela pode fornecer uma base para dois fundamentos da percepção precoce dos números, a saber o conceito de *número cardinal* (o número total de objetos em um conjunto) e a habilidade de *reconhecimento verbal dos números* (RVN), às vezes chamado de “subitizing (verbal)”, indicados no alto da *figura 1*. O reconhecimento verbal dos números consiste em reconhecer de forma segura e eficaz o número de objetos em pequenos conjuntos e dar-lhe o nome correto. A utilização de “um”, “dois”, “três”, junto com a visualização de exemplos e de contraexemplos de cada um pode ajudar as crianças de 2 e 3 anos a desenvolver um conceito cada vez mais seguro e exato dos “números intuitivos” *um, dois e três*, isto é, uma compreensão do conceito de um, de dois e de três.

- Por exemplo, ao ver ••, ΔΔ, e o o (exemplos de pares), todos chamados de “dois”, as crianças pequenas podem perceber que a aparência dos objetos nos conjuntos não é importante (a forma e a cor são irrelevantes para o número). Isso pode lhes dar também um rótulo (“dois”) para seu conceito intuitivo de *pluralidade* (mais que um objeto).
- O fato de ver •, •••, Δ, ΔΔΔ, , e  (contraexemplos de pares) chamados de “não dois” ou com o nome de outro número, pode ajudá-las a definir os limites do conceito de *dois*.

As implicações-chave para o ensino são que a compreensão básica dos números cardinais não é inata e que ela não se desenvolve automaticamente (cf. Dehaene[15]).[14,16] Os pais e os educadores na pré-escola são importantes para fornecer as experiências e o *feedback* necessários para desenvolver os conceitos numéricos. Eles devem tirar proveito de situações diárias cheias de significado para denominar (e estimular as crianças a denominar) pequenos conjuntos (por exemplo, “Quantos pés você tem?” “Portanto, você precisa de dois sapatos e não apenas um.” “Você pode pegar um biscoitinho, mas não dois.”) Algumas crianças entram na pré-escola sem saber reconhecer todos os números intuitivos. Crianças assim apresentam um sério risco de fracasso escolar e precisam de um trabalho intensivo de recuperação. O serviço de detecção na pré-escola deve verificar se as crianças conseguem reconhecer imediatamente conjuntos formados de um a três objetos e são capazes de distingui-los de conjuntos um pouco maiores de quatro ou cinco objetos.

Como ilustrado na *figura 1*, a evolução conjunta dos conceitos cardinais dos números intuitivos e a habilidade do RVN podem fornecer as bases para uma variedade de conceitos e habilidades sobre os números, a contagem e a aritmética. Essas competências podem servir de base para uma *contagem verbal significativa*. A percepção dos números intuitivos pode ajudar as crianças a literalmente ver que um conjunto chamado de “dois” possui mais objetos que um conjunto chamado de “um”, e que um conjunto chamado de “três” tem mais objetos que um conjunto chamado de “dois”. Por sua vez, essa compreensão ordinal básica dos números pode ajudar as crianças a compreender que a ordem dos nomes dos números é importante quando contamos (*o principio de ordem estável*) e que a sequência dos nomes dos números (“um, dois, três...”) representa conjuntos cada vez maiores. À medida que a criança se familiariza com a sequência da contagem, ela desenvolve a capacidade de começar de qualquer ponto na sequência e de dizer (de forma segura) o nome do número seguinte na sequência (habilidade do número seguinte) no lugar de contar a partir de “um”.

A capacidade de citar automaticamente o número que segue imediatamente outro número na sequência de contagem pode ser a base para perceber que o fato de acrescentar “um” a um número resulta num número maior e mais especificamente, na *regra do número seguinte para as operações n+1/1+n*. Quando se adiciona “um”, a soma representa o número que segue o outro número na sequência de contagem (por exemplo, a soma de 7+1 corresponde ao número que segue “sete” na contagem, isto é, “oito”). Essa estratégia de raciocínio pode permitir que as crianças deduzam de forma eficaz a soma de qualquer combinação semelhante para a qual conhecem a sequência de contagem, até mesmo aquelas ainda não praticadas anteriormente como as operações de adição de grandes números com vários dígitos como 28+1, 128+1 ou 1.000.128+1. Com o tempo, essa estratégia de raciocínio se torna automática – ela pode ser aplicada eficazmente, sem necessidade de reflexão (isto é, ela se torna um elemento da rede de recuperação na memória). Em outras palavras, ela se torna o fundamento para o *domínio das operações para as combinações n+1/1+n*.

O RVN e o conceito de cardinalidade que ele representa podem constituir uma base para a *contagem significativa de objetos*.[17] As crianças que conseguem reconhecer “um”, “dois” e “três” são mais suscetíveis de se beneficiar dos esforços dos adultos para mostrar e ensinar a contagem de objetos do que aquelas que não conseguem. Elas são também mais suscetíveis de reconhecer o objetivo da contagem de objetos (como sendo outra maneira de determinar o total de um conjunto) e a justificação dos procedimentos de contagem de objetos (por exemplo, que o motivo pelo qual algumas pessoas enfatizam ou repetem o nome do último número utilizado no processo de contagem é que ele representa o total do conjunto). A contagem significativa de objetos é necessária para a invenção de *estratégias de contagem* (com objetos ou nomes dos números), para determinar somas e diferenças. À medida que essas estratégias se tornam eficazes, a atenção fica liberada para descobrir padrões e relações; essas regularidades matemáticas, por sua vez, podem servir de base para *estratégias de raciocínio* (isto é, recorrer a relações e operações conhecidas para deduzir a resposta a uma combinação desconhecida). À medida que essas estratégias se tornam automáticas, elas podem servir como *estratégias de recuperação* na memória que possibilitarão *produzir respostas de forma eficaz a partir de uma rede da memória ou de recuperação na memória*.

O RVN pode fazer com que a criança veja um mais um como *dois*, um mais um mais um como *três*, ou dois mais um como *três*, e o contrário (isto é, *três* como um mais um mais um ou dois mais um). A criança desenvolve assim uma compreensão da *composição e da decomposição* (um

todo pode ser construído a partir de elementos individuais ou decomposto em elementos individuais, muitas vezes de diferentes maneiras). O fato de ver repetidamente a composição e a decomposição de *dois* e de *três* pode levar *ao domínio das operações mais simples de adição e de subtração* (isto é, "um mais um é igual a dois", "dois mais um é igual a três", e "dois menos um é igual a um"). A decomposição repetida de *quatro* e de *cinco*, com comentários (isto é, denominando um conjunto de quatro como sendo "dois mais dois", e ouvindo outra pessoa confirmar que "sim, dois mais dois é igual a quatro"), pode levar a um *domínio das operações com as somas mais simples até cinco*, e constitui uma das maneiras de descobrir a *regra do número seguinte para as combinações n+1/1+n* (discutida acima).

Juntos, o conceito de cardinalidade, o RVN e os conceitos de composição e de decomposição podem fornecer os fundamentos da *construção de um conceito básico de adição e de subtração*. Por exemplo, ao adicionar um objeto a um conjunto de dois objetos, uma criança pode literalmente ver que o conjunto de origem foi transformado em um conjunto maior de *três* objetos. Essas competências podem também servir de base para desenvolver uma compreensão relativamente concreta, e até relativamente abstrata, dos seguintes conceitos aritméticos[18]:

- *Conceito de negação subtrativa*. Por exemplo, quando as crianças identificam que se você tem dois blocos e tira os dois blocos, não sobra nenhum bloco, elas podem deduzir que *qualquer número tirado dele mesmo não deixa nada.*
- *Conceito de identidade aditiva e subtrativa*. Por exemplo, quando as crianças reconhecem que, quando se tem dois blocos e não se tira nenhum, sobram dois blocos, elas podem deduzir a regularidade segundo a qual quando não se tira nada de um número, *ele permanece inalterado*. Os conceitos de negação subtrativa e de identidade subtrativa podem fornecer as bases para *o domínio das operações com as famílias de fatos de subtração n – n = 0 e n – 0 = n respectivamente*.

Em consequência, uma baixa percepção dos números pode prejudicar o desenvolvimento do domínio das operações e outros aspectos do desempenho em matemática. Por exemplo, Mazzocco e Thompson[19] descobriram que o desempenho de crianças em idade pré-escolar relativo aos quatro elementos seguintes do *Test of Early Mathematics Ability* – segunda edição (TEMA-2) – permitia prever as crianças que teriam dificuldades em matemática no segundo e no terceiro ano do ensino de primeiro grau: a contagem significativa de objetos (identificar que o último nome de número utilizado no processo de contagem indica o total), a cardinalidade, a comparação de números de um dígito (isto é, "Qual é maior: quatro ou cinco?"), somar

mentalmente números de um dígito, e ler números de um dígito. Convém observar que o reconhecimento verbal dos números intuitivos constitui um fundamento das três primeiras habilidades e um aprendizado significativo da quarta.

Pergunta 4. A base para ajudar os alunos a desenvolver a percepção dos números em geral e o domínio das operações em particular é de criar oportunidades para lhes permitir descobrir padrões e relações. Por exemplo, uma criança que aprendeu as "duplas", tais como 5+5=10 e 6+6=12, de uma forma significativa (isto é, a criança identifica que todas as somas dessa família são números pares ou múltiplos de dois), pode utilizar esse conhecimento para deduzir as somas de operações desconhecidas de duplas-mais-um como 5+6 ou 7+6.

Para serem apropriadas do ponto de vista desenvolvimental, essas oportunidades de aprendizado devem ter um objetivo, fazer sentido e ser baseadas em perguntas.[20]

- As instruções devem ter um objetivo e ser atraentes para as crianças. Isso pode ser conseguido integrando instruções em brincadeiras estruturadas (por exemplo, uma brincadeira que envolve o lançamento de um dado pode ajudar as crianças a identificar padrões regulares de um a seis). As aulas de música e de arte podem servir de veículos naturais para uma reflexão sobre padrões, números e formas (por exemplo, manter um ritmo de duas ou três batidas, desenhar grupos de balões). Os pais e professores podem tirar proveito de muitas situações do dia-dia (por exemplo, "Quantos pés você tem? ... Então, quantas meias você precisa tirar da gaveta?"). As perguntas das crianças podem ser uma fonte importante de instruções cheias de significado.
- As instruções devem fazer sentido para as crianças e desenvolver pouco a pouco (e ter relação com) aquilo que elas já conhecem. Um objetivo significativo para os adultos que trabalham com crianças de dois anos é fazer com que as crianças identifiquem "dois". Forçá-las muito rápido a identificar números maiores como quatro pode ser forte demais e fazer com que elas fiquem desestimuladas (elas ficam desatentas ou agressivas, "chutam" uma resposta qualquer, ou se desinteressam da atividade).
- Na medida do possível, as instruções devem ser na forma de perguntas ou suscitar a reflexão. Ao invés de simplesmente dar informações às crianças, os pais e professores devem dar às crianças a oportunidade de refletir sobre um problema ou uma tarefa, fazer suposições (hipóteses fundamentadas), imaginar sua própria estratégia ou deduzir sua própria resposta.

Os elementos acima estão ilustrados nos casos de Alice[21] e de Lukas.[22]

- *O caso de Alice*. Há vários meses, essa menina de dois anos e meio era capaz de reconhecer um, dois ou três objetos. E seus pais desejavam ampliar seus conhecimentos até o número quatro, logo além de suas competências. No lugar de simplesmente denominar conjuntos de quatro objetos para ela, eles lhe perguntaram sobre conjuntos de quatro objetos. Alice respondia muitas vezes decompondo os conjuntos que não reconhecia em dois conjuntos familiares com dois objetos cada. Seus pais aproveitavam então sua resposta dizendo-lhe: "Dois mais dois é igual a quatro." Aos 30 meses de idade, *quando lhe mostram uma foto com quatro cachorrinhos, Alice coloca dois dedos da sua mão esquerda em dois cachorrinhos e diz: "Dois". Mantendo essa posição, ela coloca dois dedos da mão direita nos dois outros cachorrinhos e diz: "Dois". Depois, ela utiliza a relação conhecida "2 mais 2 é igual a 4" (que seus pais lhe ensinaram) para especificar a cardinalidade do conjunto.*
- *O caso de Lucas*. No âmbito de um jogo matemático no computador, a operação 6+6 foi apresentada ao Lucas. Ela acertou a soma contando. Logo depois, lhe foi a perguntado 7+7. Ele sorriu e respondeu rapidamente "Treze". Quando o computador lhe indicou que a soma era 14, ele pareceu perplexo. Algumas perguntas depois, lhe foi perguntado 8+8, e ele comentou: "Eu ia dizer 15, porque 7+7 era igual a 14. Mas antes, 6+6 era igual a 12, e eu tinha certeza que 7+7 era igual a 13, mas era 14. Então, vou responder que 8+8 é igual a 16."

Futuras orientações

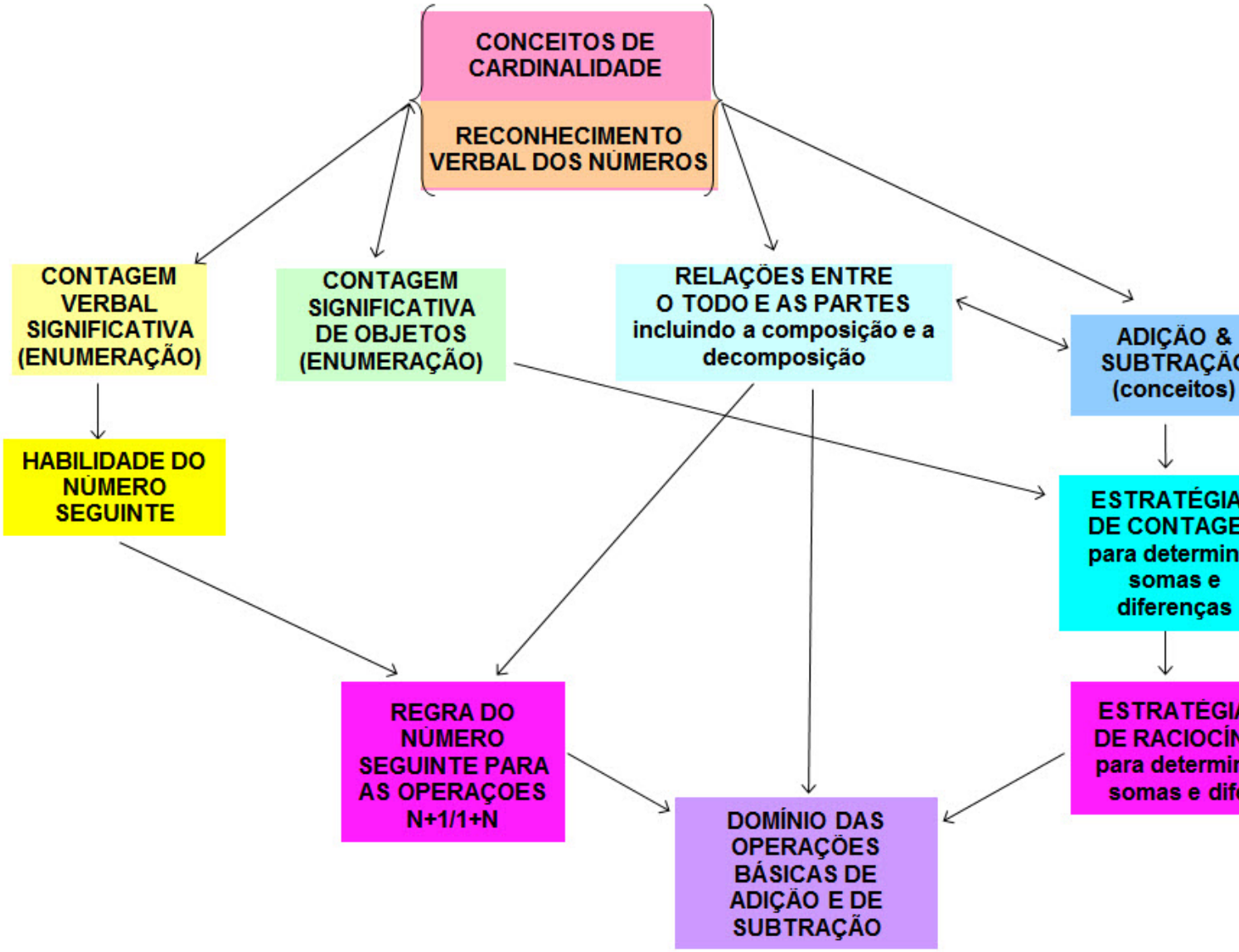
Ainda há muitas coisas a aprender sobre o desenvolvimento da matemática em crianças em idade pré-escolar. Será que a habilidade do reconhecimento verbal dos números aos dois anos permite predizer que ela estará pronta para a pré-escola ou será bem-sucedida em matemática? Caso seja, será que uma intervenção focada em exemplos e contraexemplos vai permitir que as crianças em risco de insucesso escolar alcancem seus pares? Quais outros conceitos ou habilidades na idade de dois ou três anos podem indicar que a criança está pronta para a pré-escola ou que será bem-sucedida em matemática na escola? Qual é a eficácia dos programas de matemática para a primeira infância que estão sendo desenvolvidos atualmente?

Conclusões

Ao contrário das convicções de muitos educadores para a primeira infância, o ensino da matemática para crianças de apenas dois anos de idade faz sentido.[23,24,25,26] Como mostra claramente a *figura 1*, esse ensino deve começar ajudando as crianças a desenvolver um conceito cardinal dos números intuitivos, e a habilidade de reconhecer e denominar conjuntos de um a

três objetos com o nome correto do número. A figura 1 mostra também que esses aspectos do conhecimento dos números constituem elementos-chave para as operações numéricas posteriores e, muitas vezes, faltam em crianças com deficiências em matemática.[27] O ensino precoce não significa impor conhecimentos às crianças em idade pré-escolar, treinando-as com cartões pedagógicos, ou fazendo-as decorar operações aritméticas. O estímulo à percepção dos números e ao domínio das operações deveria estar focado em ajudar as crianças a descobrirem os padrões e as relações e em estimulá-las a inventar suas próprias estratégias de raciocínio.

FIGURA 1: Trajetória de aprendizado de alguns conceitos e habilidades-chave sobre números, contagem e aritmética.



O estudo aqui descrito foi financiado em parte graças a uma subvenção da National Science Foundation (BCS-0111829), da Spencer Foundation (Major Grant 200400033), do National Institutes of Health (1 R01 HD051538-01) e do Institute of Education Science (R305K050082). As opiniões expressas no presente documento são de exclusiva responsabilidade do autor e não correspondem necessariamente à posição, à política ou ao aval das instituições acima mencionadas.

Referências

1. Baroody AJ, Dowker A. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. In: Schoenfeld A, ed. *Studies in mathematics thinking and learning series*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2003.
2. Kilpatrick J, Swafford J, Findell B, eds. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press; 2001.
3. Baroody AJ, Lai ML, Mix KS. The development of number and operation sense in early childhood. In: Saracho O, Spodek B, eds. *Handbook of research on the education of young children*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2006: 187-221.
4. Clements D, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2004: 149-172.
5. Ginsburg HP, Klein A, Starkey P. The development of children's mathematical knowledge: Connecting research with practice. In: Sigel IE, Renninger KA, eds. *Child psychology in practice*. 5th Ed. New York, NY: Wiley & Sons; 1998; 401–476. *Handbook of child psychology*, vol 4.
6. Baroody AJ. Why children have difficulties mastering the basic number facts and how to help them. *Teaching Children Mathematics* 2006;13:22–31.
7. Baroody AJ, Thompson B, Eiland M. Fostering the fact fluency of grade 1 at-risk children. Paper presented at: The annual meeting of the American Educational Research Association. April, 2008. New York, NY.
8. Gersten R, Chard, D. Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education* 1999;33(1):18–28.
9. Jordan NC. The need for number sense. *Educational Leadership* 2007;65(2):63–66.
10. Dowker AD. *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Hove, England: Psychology Press; 2005.
11. Baroody AJ. The development of kindergartners' mental-addition strategies. *Learning and Individual Differences* 1992;4:215-235.
12. Baroody AJ, Eiland M, Thompson B. Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development* 2009;20:80-120.
13. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody AJ. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail R, ed. *Advances in child development and behavior*, vol 33. New York, NY: Academic Press; 2005: 305-346.
14. Baroody AJ, Li X, Lai ML. Toddlers' spontaneous attention to number. *Mathematics Thinking and Learning* 2008;10:1-31.
15. Dehaene S. *The number sense*. New York, NY: Oxford University Press; 1997.
16. Wynn K. Numerical competence in infants. In; Donlan C, ed. *Development of mathematical skills*. Hove, England: Psychology Press; 1998: 1-25.

17. Benoit L, Lehalle H, Jouen F. Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development* 2004;19:291–307.

18. Baroody AJ, Lai ML, Li X, Baroody AE. Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematics Thinking and Learning* 2009;11:41–60.

19. Mazzocco M, Thompson R. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice* 2005;20:142-155.

20. Baroody AJ, Coslick RT. *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 1998.

21. Baroody AJ, Rosu L. Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations: The number sense view. In: Baroody AJ, Torbeyns T. chairs. Developing Adaptive Expertise in Elementary School Arithmetic. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association. April, 2006. San Francisco, CA.

22. Baroody AJ. Fostering early number sense. Keynote address at: The Banff International Conference on Behavioural Science. March, 2008. Banff, Alberta.

23. Baroody AJ, Li X. Mathematics instruction that makes sense for 2 to 5 year olds. In: Essa EA, Burnham MM, eds. *Development and education: Research reviews from young children*. New York: The National Association for the Education of Young Children; 2009: 119-135.

24. Bredekamp S, Copple C. Developmentally appropriate practice in early childhood programs. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children; 1997.

25. Copley J, ed. *Mathematics in the early years, birth to five*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 1999.

26. Copley J, ed. The young child and mathematics. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children; 2000.

27. Landerl K, Bevan A, Butterworth B. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9 year old students. *Cognition* 2004;93:99–125.

Conhecimento numérico na primeira infância

Catherine Sophian, PhD

University of Hawaii, EUA

Junho 2009

Introdução

Nos últimos anos, o número de pesquisas sobre o conhecimento numérico de crianças pequenas aumentou rapidamente. Esses estudos abrangem uma ampla gama de capacidades e conceitos – desde a competência do bebê para discriminar entre conjuntos que contêm quantidades diferentes de elementos,[1,2] até a compreensão dos nomes que representam os números[3,4] e a contagem[5,6,7] no caso de crianças em idade pré-escolar, além de seu entendimento sobre a relação inversa entre a adição e a subtração.[8,9]

Do que se trata

A pesquisa sobre o conhecimento numérico de crianças pequenas fornece uma base importante para formular padrões para a educação na primeira infância[10] e planejar currículos de Matemática adequados a essa fase da vida da criança.[11,12,13] Além disso, o conhecimento matemático que as crianças adquirem antes de iniciar a educação formal tem ramificações importantes para o desempenho escolar e as futuras opções de carreira.[14] Uma análise dos preditores de realização acadêmica, baseada em seis conjuntos de dados longitudinais, mostrou que as habilidades matemáticas da criança no momento do ingresso na escola permitiam prever o desempenho escolar subsequente de maneira ainda mais enfática do que as habilidades de leitura e as habilidades relacionadas à atenção e ao aspecto socioemocional.[15]

Problemas

Fundamentalmente, as operações com números exigem a compreensão do número como representação de um tipo particular de grandeza. De forma análoga, para compreender de que modo se desenvolvem as habilidades de operações com números na primeira infância, é preciso saber como a criança passa a compreender as relações quantitativas básicas existentes entre os números e outros tipos de quantidades, e de que modo compreende os aspectos dos números que os distinguem de outros tipos de quantidades.

©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

Contexto de pesquisa

A clássica pesquisa de Piaget sobre o desenvolvimento lógico-matemático investigou a compreensão da criança sobre as propriedades gerais de quantidade – tais como seriação e conservação das relações de equivalência sob certos tipos de transformações.[16] No entanto, Piaget acreditava que esse tipo de conhecimento só surgiria quando a criança adquirisse o pensamento operatório concreto, por volta dos 5-7 anos de idade. Posteriormente, outros pesquisadores[17] procuraram demonstrar que crianças mais novas tinham um conhecimento numérico consideravelmente maior do que acreditava Piaget; e a pesquisa atual fornece evidências de uma ampla gama de habilidades iniciais em operações com números.[18]

Questões-chave de pesquisa

Uma alegação de peso, porém polêmica, presente na literatura atual sobre as capacidades numéricas iniciais, sustenta que o cérebro é "programado" para operar com números.[19,20] Essa ideia é frequentemente apoiada por evidências de discriminação numérica em bebês e em animais.[21] No entanto, os críticos do inatismo – doutrina filosófica que afirma que a mente nasce com ideias/conhecimentos – destacam a difusão de mudanças resultantes do desenvolvimento no raciocínio numérico,[22] a lenta diferenciação dos números em relação a outras dimensões quantitativas[23] e a natureza contextualizada do conhecimento numérico inicial.[24] Além disso, evidências cumulativas indicam que a linguagem[24] e outros produtos e práticas culturais[25,26] contribuem de maneira considerável para a aquisição do conhecimento numérico pelas crianças pequenas.

Resultados de pesquisas recentes

Conhecimento numérico nos primeiros meses de vida

Uma das áreas mais ativas da pesquisa atual diz respeito às habilidades numéricas dos bebês. Kobayashi, Hiraki e Hasegawa[1] utilizaram as discrepâncias entre a informação visual e a informação auditiva sobre o número de itens presentes em uma coleção para testar a discriminação numérica em bebês de 6 meses de idade. Os autores mostraram às crianças objetos que produziam um som quando caíam sobre uma superfície e, a seguir, deixavam cair dois ou três desses objetos atrás de uma tela, de tal modo que os bebês ouvissem o som de cada objeto, mas não pudessem vê-los. A seguir, removeram a tela para mostrar ou o número correto de objetos ou um número diferente (3, na presença de 2 sons, e vice-versa). Os bebês olhavam

durante um tempo maior para os objetos quando o número de itens não correspondia ao número de sons, o que indica que eram capazes de distinguir entre dois e três objetos. Outra pesquisa indica que bebês de 6 meses de idade também conseguem discriminar entre quantidades numéricas maiores, desde que a razão numérica entre elas seja grande. Bebês de 6 meses de idade são capazes de discriminar entre 4 e 8 elementos[27] e mesmo entre 16 e 32.[28] No entanto, quando o contraste é menor (8 e 12, por exemplo), os bebês nessa faixa etária não conseguem fazer a distinção,[29] mas os mais velhos sim.[2] Ou seja: à medida que sua idade aumenta, os bebês tornam-se capazes de fazer discriminações numéricas mais precisas .

O conhecimento da criança pequena sobre as relações numéricas

Tendo em vista que os números representam um tipo de grandeza, um aspecto fundamental do conhecimento numérico diz respeito às relações de igualdade, inferioridade e superioridade entre quantidades numéricas.[30] Surpreendentemente, à luz das constatações relacionadas a bebês, o fato de crianças em idade pré-escolar compararem numericamente os conjuntos, principalmente quando isso envolve ignorar outras diferenças entre tais conjuntos, é considerado um feito significativo de desenvolvimento.

Por exemplo, Mix[31] estudou a capacidade de crianças de 3 anos de idade para combinar numericamente um conjunto de 2, 3 ou 4 pontos pretos. Essa tarefa era fácil quando os objetos oferecidos às crianças eram semelhantes, em termos perceptuais, aos pontos aos quais deveriam corresponder – por exemplo, discos pretos, ou conchas vermelhas aproximadamente do mesmo tamanho dos pontos. Entretanto, o desempenho das crianças foi menor quando os objetos manipulados eram diferentes em termos perceptuais – por exemplo: estatuetas de leões ou objetos heterogêneos.

Muldoon, Lewis, e Francis[7] verificaram a capacidade de crianças de 4 anos de idade para avaliar a relação numérica entre duas fileiras de blocos – contendo de 6 a 9 itens por fileira – diante de pistas errôneas em relação ao comprimento das fileiras – isto é, quando duas fileiras de comprimentos diferentes continham o mesmo número de itens, ou duas fileiras de igual comprimento continham números diferentes de itens. Para comparar as fileiras, a maioria das crianças baseou-se em comparações de comprimento, e não na contagem dos itens. Entretanto, um procedimento de treinamento em três sessões conduziu a melhor desempenho, particularmente no caso de crianças que, como parte do treinamento, foram solicitadas a explicar por que as fileiras eram de fato numericamente iguais ou desiguais (como indicado pelo

experimentador).

Lacunas de pesquisa

Embora dados experimentais relativos às habilidades iniciais em operações com números venham se acumulando rapidamente, a ausência de explicações teóricas que incorporem toda a gama de resultados empíricos limita nossa compreensão sobre o modo como as diversas constatações já obtidas complementam-se e sobre as questões que permanecem sem solução. Na literatura relacionada a bebês, por exemplo, as explicações contraditórias das capacidades numéricas iniciais geraram muitas pesquisas nos últimos anos. Mesmo assim, os resultados alcançados não reduziram as controvérsias teóricas. Ao apresentar conclusões teóricas, os pesquisadores devem ter conhecimento de todo o *corpus* de descobertas, e suas teorias devem ser formuladas de maneira suficientemente precisa para que seja possível diferenciá-las empiricamente.

Além disso, é preciso que os pesquisadores reúnam informações mais precisas sobre os processos que favorecem o desenvolvimento inicial de habilidades em operações com números. Sabemos que o desempenho de crianças pequenas é afetado por variáveis contextuais que vão desde cultura e classe social[32] até padrões de interação pais-filho[33,34] e professor-aluno[35]. Até o momento, porém, dispomos somente de poucas informações, a maioria delas proveniente de estudos experimentais de formação[7,25,36] referentes ao modo como experiências específicas alteram o pensamento numérico da criança. Seria de grande utilidade a realização de pesquisas que fornecessem dados convergentes sobre (a) experiências numéricas cotidianas de crianças pequenas e de que forma essas experiências variam com a idade da criança, e (b) efeitos experimentais dos tipos de experiências sobre o pensamento infantil.

Conclusões

As pesquisas disponíveis sobre o desenvolvimento do conhecimento numérico em crianças pequenas apoiam quatro generalizações que têm implicações importantes para políticas e práticas. Em primeiro lugar, o desenvolvimento das habilidades numéricas é multifacetado. As operações com números na primeira infância englobam muito mais do que contar e conhecer alguns fatos elementares de aritmética. Em segundo lugar, independentemente da capacidade numérica evidenciada até mesmo por bebês, as mudanças associadas à idade são generalizadas. Nas comparações por grupos etários, crianças mais velhas quase sempre têm melhor

desempenho. Em terceiro lugar, a variabilidade é generalizada. O desempenho individual da criança varia quando realiza diferentes tarefas numéricas,[37] da mesma forma que varia seu comprometimento com tipos particulares de raciocínio numérico em diferentes contextos,[3] e ainda variam as respostas de uma tentativa para outra em uma única tarefa.[5,38] Por fim, os progressos da criança na aquisição do conhecimento numérico são altamente maleáveis: são influenciados por atividades informais como jogos de tabuleiro,[25] por atividades experimentais planejadas para esclarecer relações numéricas,[7,36] e por variações nos modos como pais[33,34] e professores[35] falam sobre números com as crianças.

Implicações

Uma contribuição importante da pesquisa sobre as operações com números na primeira infância para políticas e práticas é informar os objetivos estabelecidos para a instrução inicial da Matemática. Da mesma forma que o desenvolvimento de habilidades numéricas na primeira infância é multifacetado, os objetivos de programas instrucionais para a primeira infância devem ser muito mais amplos do que apenas reforçar as habilidades infantis para contar ou ensiná-las alguns fatos aritméticos básicos. Números, como outros tipos de grandezas, caracterizam-se por relações de igualdade e desigualdade. Ao mesmo tempo, diferem de outros tipos de grandezas na medida em que se baseiam no fracionamento de uma quantidade total em unidades. As atividades educacionais que estimulam a criança a pensar sobre as relações entre quantidades e efeitos de transformações – tais como repartir, agrupar ou rearranjar essas relações – podem ser úteis para o desenvolvimento da compreensão que as crianças têm sobre essas ideias. A variabilidade e a maleabilidade do pensamento numérico da criança pequena indicam o potencial de contribuição substancial dos programas educacionais destinados à primeira infância para o crescente conhecimento da criança sobre números.

Referências

1. Kobayashi T, Hiraki K, Hasegawa T. Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science* 2005;8(5):409-419.
2. Xu F, Arriaga RI. Number discrimination in 10-month-olds. *British Journal of Developmental Psychology* 1985;3(1):47-55.
3. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology 2009;102(4):427-444*.
4. Sarnecka BW, Lee MD. Levels of number knowledge in early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103(3):325-337.
5. Chetland E, Fluck M. Children's performance on the 'give-x' task: A microgenetic analysis of 'counting' and 'grabbing' behaviour. *Infant and Child Development* 2005;14(2):133-154.

6. Le Corre M, Carey S. One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition* 2007:105(2):395-438.

7. Muldoon K, Lewis C, Francis B. Using cardinality to compare quantities: The role of social-cognitive conflict in the development of basic arithmetical skills. *Developmental Science* 2007;10(5):694-711.

8. Canobi KH, Bethune NE. Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition* 2008;108(3):675-686.

9. Sherman J, Bisanz J. Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development* 2007;8(3):333-344.

10. Clements DH, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2005.

11. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal* 1993;30(1):95-122.

12. Griffin S, Case R. Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education* 1997;3(1):1--49.

13. Starkey P, Klein A, Wakeley A. Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly* 1998;13(4):637-658.

14. National Mathematics Advisory Panel. *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC.: U. S. Department of Education; 2008.

15. Duncan GJ, Dowsett CJ, Claessens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*. 2007;43(6):1428 - 1446.

16. Piaget J. *The child's conception of number*. Gattegno C, Hodgson FM, trans. New York, NY: Norton; 1952.

17. Gelman R, Gallistel CR. *The child's understanding of number*. Cambridge, MA; Harvard University Press; 2005.

18. Geary DC. Development of mathematical understanding. In: Damon W, ed. *Handbook of child psychology*. 6th ed. New York, NY: John Wiley & Sons; 2006:777-810. Khun D, Siegler RS Siegler, eds. *Cognition, perception, and language*.Vol. 2.

19. Butterworth B. *The mathematical brain*. New York, NY: Macmillan; 1999.

20. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford, UK: Oxford University Press; 1997

21. Feigenson L, Dehaene S, Spelke E. Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences 2002;6(6):248-254*.

22. Sophian C. Beyond competence: The significance of performance for conceptual development. *Cognitive Development* 1997;12(3):281-303.

23. Sophian C. *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates; 2007.

24. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody AJ. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal quantification in early childhood. In: RV Kail, ed. *Advances in child development and behavior. vol. 33*. New York, NY: Academic Press; 2005:305-346.

25. Ramani GB, Siegler RS. Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development* 2008;79(2):375-394.

26. Schliemann AD, Carraher DW. The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review* 1991;11(3):271-287.

27. Xu F. Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representation. *Cognition* 2003;89(1):B15-B25

28. Xu F, Spelke ES, Goddard S. Number sense in human infants. *Developmental Science* 2005;8(1):88-101.

29. Xu F, Spelke ES. Large-number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 2000;74(1):B1-B11.

30. Davydov VV. Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In: Kilpatrick J, Wirszup I, Begle EG, Wilson JW, eds. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Chicago, Ill: University of Chicago Press; 1990:281-307. Steffe LP, ed. *Children's capacity for learning mathematics.* Vol. 7.

31. Mix KS. Surface similarity and label knowledge impact early numerical comparisons. *British Journal of Developmental Psychology* 1985;3(1):47-55

32. Starkey P, Klein A. Sociocultural influences on young children's mathematical knowledge. In: Saracho ON, Spodek B, eds. *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education*. Charlotte, NC: IAP/Information Age Pub.; 2008:253-276.

33. Blevins-Knabe B, Musun-Miller L. Number use at home by children and their parents and its relationship to early mathematical performance. *Early Development and Parenting* 1996;5:173-183.

34. Lefevre J, Clarke T, Stringer AP. Influences of language and parental involvement on the development of counting skills: Comparisons of French- and English-speaking Canadian children. *Early Child Development and Care* 2002;172(5):451-462.

35. Klibanoff RS, Levine SC, Huttenlocher J, Vasilyeva M, Hedges LV. Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk." *Developmental Psychology* 1984;20(5):797-806.

36. Sophian C, Garyantes D, Chang C. When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology* 1984;20(5):797-806

37. Dowker A. Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science* 2008;11(5):650-654.

38. Siegler RS. How does change occur: A microgenetic study of number conservation. *Cognitive Psychology* 2002;45:337-374.

Habilidades iniciais em operações com números: a transição dos primeiros meses de vida até a primeira infância

Kelly S. Mix, PhD

Michigan State University, EUA

Junho 2010

Introdução

Os conceitos relacionados aos números surgem antes da escolarização formal. Crianças em idade pré-escolar exibem habilidades verbais, como contar, e conceitos básicos de equivalência, ordenação e transformação quantitativa. Embora pesquisadores estejam de acordo quanto à existência dessas habilidades na primeira infância, continuam a discutir em que momento, e por meio de quais mecanismos, surgem essas habilidades. Em outras palavras, quais são as origens do desenvolvimento inicial de habilidades em operações com números?

Do que se trata

Tradicionalmente, as pesquisas sobre operações com números focalizaram a contagem verbal. Entretanto, a noção de que as habilidades em operações com números podem surgir nos primeiros meses e no primeiro ano de vida deslocou o foco para habilidades não verbais. Essa mudança expandiu o âmbito de comportamentos incluídos nas habilidades iniciais em operações com números – uma mudança que tem implicações diretas na educação e na avaliação da primeira infância. Essa mudança também suscitou questões sobre as origens das deficiências e das falhas em desempenho matemático, em termos de desenvolvimento – por exemplo, dificuldades associadas a diferenças entre grupos socioeconômicos.

Problemas

Estudos atuais sobre desenvolvimento diferem quanto ao peso que atribuem às representações verbais *versus* não verbais.

Alguns estudiosos argumentam que a estrutura conceitual central relacionada aos números é inata, e assume a forma de uma representação não verbal similar à contagem verbal.[1,2,3] Nesse

sentido, associar palavras que designam números em seus referenciais não verbais é um avanço importante em termos de desenvolvimento.

Outros afirmam que processos inatos contribuem para o desenvolvimento de habilidades com números, mas não constituem um sistema conceitual completo para o número.[4,5] As explicações fornecidas incorporam tanto a contagem pré-verbal como um segundo formato representativo baseado em rastreamento de objetos, que caracterizam a contagem verbal como um catalisador conceitual que permite a integração das duas representações não verbais,[5] transcendendo assim suas limitações inerentes e alcançando um verdadeiro conceito de número.[4]

Outras explicações ainda incorporam representações com base no objeto, mas argumentam que tais representações são desenvolvidas durante a primeira infância.[6] Sob este ponto de vista, as representações numéricas com uso de objetos são imprecisas, mesmo para conjuntos com um número reduzido de elementos. Pelo contrário, acredita-se que tais representações aproximam-se do número com crescente exatidão devido a: (1) aumento da capacidade da memória operacional relacionados à idade; e (2) interações entre o conhecimento parcial dos nomes dos números e o reconhecimento de pequenas quantidades em contextos específicos.[6,7,8]

Alguns estudiosos argumentam que os conceitos de número são extraídos do próprio sistema de contagem, sem apoio de representações não verbais. Estudos demonstram que a criança não entende os princípios de contagem até alcançar o domínio dos procedimentos de contagem.[9,10] Foi argumentado também que a criança não consegue classificar pequenos conjuntos com o sistema de contagem convencional, uma vez que não consegue distinguir a sequência de números naturais de outras sequências.[11]

Contexto da pesquisa

O fato de a pesquisa ter focalizado o surgimento de habilidades em operações com números no plano verbal, inserida em um contexto de base conceitual não-verbal teve como consequência experimentos que incluem uma mistura de métodos verbais e não verbais. No plano verbal, os pesquisadores medem diversos subcomponentes de contagem – por exemplo, pedir à criança que recite os números em ordem, conte um conjunto de objetos ou nomeie o número cardinal correspondente aos elementos de um conjunto. No plano não verbal, os pesquisadores utilizam tarefas concretas, que não exigem contagem verbal. No caso de crianças muito pequenas e bebês, é comum a utilização de procedimentos que medem o tempo de observação – por

exemplo, familiaridade – e tarefas em que devem alcançar os objetos com a mão.

Questões-chave de pesquisa

Um dos objetivos mais importantes é a descrição da sensibilidade numérica de bebês e crianças pequenas. Pesquisadores querem saber até que ponto as crianças compreendem a noção de número antes de adquirir habilidades convencionais. Muitas vezes, o perfil específico de pontos fortes e pontos fracos no plano não verbal é utilizado para argumentar em favor de uma determinada linha de estudo. Outro objetivo importante da pesquisa é a descrição detalhada do desenvolvimento das habilidades em operações com números no plano verbal. Esse tipo de pesquisa examina cuidadosamente as interações potenciais entre operações com números no plano verbal e operações com números no plano não verbal.

Resultados de pesquisas recentes

Sensibilidade numérica em bebês

A pesquisa sobre familiaridade inicial mostrou que bebês eram capazes de discriminar entre pequenos conjuntos de objetos. Por exemplo, ao mostrar-lhes uma série de conjuntos de objetos contendo o mesmo número de elementos – dois, por exemplo – porém com cores, formas e posições diferentes, seu tempo de observação reduziu-se gradativamente. Quando foi apresentado um novo número de objetos – por exemplo, três – o tempo de observação aumentou, o que sugere que os bebês detectaram a mudança de número.[12,13] Experiências similares sugeriram que bebês são capazes de discriminar grandes conjuntos de elementos apresentados de forma visual e auditiva,[14,15] de realizar cálculos simples relacionados aos objetos[3] e de detectar relações numéricas entre modalidades.[16,17]

Medidas não verbais em crianças pequenas

Crianças realizam tarefas numéricas concretas (baseadas em objetos) muito antes de demonstrar compreensão semelhante em tarefas verbais. Por exemplo, a criança em idade pré-escolar soluciona problemas simples de adição e subtração utilizando objetos – como 2 + 2 – anos antes de ser capaz de resolver problemas verbais análogos.[6,8,18] Do mesmo modo, a criança é capaz de fazer ordenações e equivalências em tarefas de escolha sugerida muito antes de conseguir comparar verbalmente os mesmos conjuntos por meio de contagem.[6,19,20,21,22,23,24] A competência para operações não verbais surge entre 2 anos e meio e 3 anos de idade.

Desenvolvimento da contagem verbal

A contagem verbal engloba três sub-habilidades principais. Em primeiro lugar, a criança deve memorizar a sequência de palavras que representam os números. Por volta dos 3 anos de idade, geralmente a criança memoriza as primeiras dez palavras relacionadas aos números.[25,26] Aos 6 anos de idade, aprende a contar números tomando por base a estrutura decimal – de 10 a 20, de 20 a 30, etc. Em segundo lugar, o pequeno "contador" deve coordenar palavras e objetos, de modo que cada elemento de um conjunto seja marcado uma vez, e apenas uma vez. A criança comete muitos erros à medida que descobre e domina os procedimentos envolvidos na marcação, sobretudo entre 36 e 42 meses de idade.[25] Em terceiro lugar, a criança aprende que a última palavra numa contagem representa o valor cardinal – quando você conta "1-2-3," por exemplo, você dispõe de três elementos. É interessante observar que a criança alcança esse *insight* antes de dominar os procedimentos de contagem verbal, o que sugere seu acesso ao princípio da cardinalidade por meio de experiências com conjuntos contendo um número reduzido de elementos.[4,25,26,27,28,29] De fato, conjuntos com um número reduzido de elementos – por exemplo, contendo até três elementos – podem oferecer o único contexto para a descoberta do princípio da cardinalidade, uma vez que é possível determinar e marcar esses conjuntos sem contar os elementos.[4,26,27,28,29,30,31,32,33]

Lacunas na pesquisa

Um problema persistente é o de reconciliar a aparente precocidade do bebê em relação aos números com as dificuldades apresentadas por crianças em idade pré-escolar em tarefas semelhantes. Por exemplo, se bebês são capazes de representar e comparar grandes conjuntos de objetos, como alegam alguns estudiosos,[15] por que crianças em idade pré-escolar não conseguem identificar as correspondências entre grandes conjuntos antes de aprender a contar?[34,35] Essas discrepâncias alimentaram debates intensos sobre o significado do trabalho com bebês, e a articulação das literaturas relativas continua sendo um grande desafio. Por exemplo, pesquisadores apenas começaram a questionar se a sensibilidade do bebê a quantidades está relacionada com a habilidade em operações com números na idade pré-escolar e, da mesma forma, se a habilidade em operações com números na idade pré-escolar está relacionadas ao subsequente desempenho em Matemática na escola.[36]

Outra questão ainda não explorada diz respeito ao modo como as crianças coordenam as noções de quantidades discretas e quantidades contínuas. A percepção do bebê em relação a

quantidades contínuas já é um fato estabelecido. Alguns estudiosos acreditam que a utilização de quantidades contínuas realmente explica o desempenho do bebê em tarefas ligadas a números.[37,38] Seja como for, tenham os bebês a noção de quantidades contínuas, de quantidades discretas ou de ambas, há necessidade de estudos para determinar o que causa o deslocamento de sua atenção de um tipo de quantificação para outro, e também para identificar as mudanças de desenvolvimento que ocorrem na medida em que as crianças aprendem as relações entre quantidades contínuas e quantidades discretas – por exemplo, o tamanho não afeta a contagem, a menos que você esteja contando em unidades de medida.

Por fim, ainda há muito a aprender sobre as interações entre a quantificação não verbal e a contagem verbal. Há quem sustente que tudo o que o bebê é capaz de fazer ou entender na fase pré-verbal é necessariamente inato, uma vez que surge sem estímulo verbal.[4] No entanto, outros pesquisadores afirmam que mesmo bebês que ainda não falam em números já foram expostos à linguagem numérica e, portanto, não é possível saber se suas competências são de natureza não verbal ou inata.[39] Uma questão relacionada diz respeito à maneira como as crianças adquirem o significado das palavras que designam os números e até que ponto essa aquisição tem base não verbal. Pesquisas atuais também vêm investigando se a aquisição da noção de plural desempenha algum papel nessas interações.[40]

Conclusões

Evidências sobre a competência numérica em bebês levantaram questões interessantes sobre as origens da habilidade em operações com números e dos recursos conceituais utilizados por crianças pequenas para adquirir a habilidade de contagem verbal. Entretanto, são necessárias novas pesquisas para revelar o que envolve essa competência do bebê e precisamente de que modo ela está relacionada ao desenvolvimento verbal e não verbal subsequente.

Referências

1. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford, England: Oxford University Press; 1997.
2. Gallistel CR, Gelman R. Preverbal and verbal counting and computation *Cognition* 1992;44: 43-74.
3. Wynn K. Origins of numerical knowledge. *Mathematical Cognition* 1995;1:35-60.
4. Carey S. Whorf versus continuity theorists: Bringing data to bear on the debate. In: Bowerman M, Levinson SC, eds. *Language acquisition and conceptual development.* New York, NY: Cambridge University Press: 2001;185-214.
5. Spelke E. What makes us smart? Core knowledge and natural language. In: Gentner D, Goldin-Meadow S, eds. Language in mind. Cambridge, MA: MIT Press; 2003.

6. Huttenlocher J, Jordan N, Levine SC. A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General* 1994;123:284-296.
7. Mix KS, Sandhofer CM., Baroody A. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail RV, ed. *Advances in Child Development and Behavior*. New York, NY: Academic Press; 2005: 305-345.
8. Rasmussen C, Bisanz J. Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology* 2005; 91:137-157.
9. Briars DJ, Siegler RS. A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology* 1984;20:607-618.
10. Frye D, Braisby N, Lowe J, Maroudas C, Nicholls J. Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development* 1989;60:1158-1171.
11. Rips LJ, Asmuth J, Bloomfield A. Giving the boot to the bootstrap: How not to learn natural numbers. *Cognition* 2006;101:B51-B60.
12. Antell S, Keating DP. Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development* 1983;54:695-701.
13. Strauss MS, Curtis LE. Infant perception of numerosity. *Child Development 1981;52*:1146-1152.
14. Lipton JS, Spelke ES. Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science* 2003;14: 396-401.
15. Xu F, Spelke ES. Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 2000;74: B1-B11.
16. Starkey P, Spelke ES, Gelman R. Numerical abstraction by human infants. Cognition 1990;36:97-127.
17. Jordan KE, Suanda SH, Brannon EM. Intersensory redundancy accelerates preverbal numerical competence. *Cognition* 2008;108: 210-221.
18. Levine SC, Jordan NC, Huttenlocher J. Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology* 1992;53:72-103.
19. Cantlon J, Fink R, Safford K, Brannon EM. Heterogeneity impairs numerical matching but not numerical ordering in preschool children. *Developmental Science* 2007;10:431-440.
20. Mix KS. Preschoolers' recognition of numerical equivalence: Sequential sets. *Journal of Experimental Child Psychology* 1999;74:309-322.
21. Mix KS. Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development* 1999;14:269-297.
22. Mix KS. The construction of number concepts. *Cognitive Development* 2002;17:1345-1363.
23. Mix KS. Children's equivalence judgments: Crossmapping effects. *Cognitive Developmen*t 2008;23:191-203.
24. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. Do preschool children recognize auditory-visual numerical correspondences? *Child Development* 1996; 67:1592-1608.
25. Fuson KC. *Children's counting and conceptions of number*. New York, NY: Springer-Verlag; 1988.
26. Bermejo V. Cardinality development and counting. *Developmental Psychology* 1996;32:263-268.
27. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;102: 427-444.
28. Wynn, K. Children's understanding of counting. *Cognition* 1990;36:155-193.
29. Klahr D, Wallace JG. *Cognitive development: An information processing approach*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; 1976.

30. Mix KS, Sandhofer CM, Moore JA. How input helps and hinders acquisition of the cardinal word principle. Paper presented at: The biennial meeting of the Society for Research in Child Development. April 2-4, 2009. Denver, CO.

31. Schaeffer B, Eggleston VH, Scott JL. Number development in young children. *Cognitive Psychology* 1974;6:357-379.

32. Spelke ES, Tsivkin S. Initial knowledge and conceptual change: Space and Number. In: Bowerman M, Levinson SC, eds. *Language acquisition and conceptual development.,* New York, NY: Cambridge University Press; 2001:70-97.

33. Wagner S, Walters JA. A longitudinal analysis of early number concepts: From numbers to number. In: Forman G, ed. *Action and thought.* New York: Academic Press; 1982:137-161.

34. LeCorre M, Carey S. One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition* 2007;105: 395-438.

35. Siegel LS. The sequence of development of certain number concepts in preschool children. *Developmental Psychology* 1971;5:357-361.

36. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology* 2009;45: 850-867.

37. Clearfield MW, Mix KS. Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science* 1999;10:408-411.

38. Feigenson L, Carey S, Hauser M. The representations underlying infants' choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science* 2002;13:150-156.

39. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? Psychological Bulletin 2002;128: 278-294.

40. Barner D, Libenson A, Cheung P, Takasaki M. Cross-linguistic relations between quantifiers and numerals in language acquisition: Evidence from Japanese. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103: 421-440.

Preditores iniciais do bom desempenho e de dificuldades de aprendizagem em matemática

Nancy C. Jordan, PhD

University of Delaware, EUA

Junho 2010

Introdução

Dificuldades na aprendizagem de Matemática são bastante comuns. Chega a 10% a taxa de alunos com diagnóstico de algum tipo de dificuldade de aprendizagem nessa área ao longo de sua vida escolar.[1,2] São ainda mais numerosos os estudantes que enfrentam problemas em Matemática sem um diagnóstico formal. Essas dificuldades são persistentes, e alunos com esse perfil podem não alcançar jamais o nível de desempenho normal de seus pares.

Do que se trata

Os fundamentos para um bom desempenho em Matemática são estabelecidos antes do ingresso no ensino fundamental.[3,4] A identificação dos principais preditores de resultados em Matemática fornece apoio para análise, intervenção e acompanhamento do progresso da criança antes que ela apresente um atraso acadêmico importante.

Problema

As consequências de um desempenho insatisfatório em Matemática são graves tanto para o cotidiano, como para o desempenho educacional e os progressos em termos de carreira.[5] A competência matemática é necessária para o ingresso nas disciplinas CTEM (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática) no nível universitário e para as profissões relacionadas a essas áreas.[6] Há grandes diferenças entre grupos associadas à situação socioeconômica que se manifestam nos resultados em Matemática,[7] e também diferenças individuais nas capacidades fundamentais de aprendizagem.[8] Tais diferenças já estão presentes na primeira infância e aumentam ao longo da vida escolar.

Contexto da Pesquisa

©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

Os estudos longitudinais das características da criança com dificuldades em Matemática permitiram identificar objetivos importantes para intervenções. Ao ingressar na escola, a maioria das crianças tem um *sentido de número* que é relevante para a aprendizagem da Matemática. Os componentes pré-verbais do número – por exemplo, as representações exatas de pequenas quantidades e as representações aproximadas de quantidades maiores – desenvolvem-se na fase inicial da infância.[9,10,11] Mas essa base inicial, embora considerada como apoio para a aprendizagem de habilidades matemáticas convencionais, não é suficiente. A maioria das crianças com dificuldades em Matemática caracteriza-se por apresentar pontos fracos no que se refere à abstração e representação dos números inteiros, relações numéricas e operações com números[12] – aspectos maleáveis e influenciados pela experiência.[13]

Questões-chave de pesquisa

Na área da alfabetização, medidas de identificação precoce confiáveis e válidas conduziram a intervenções e iniciativas eficazes de apoio na primeira infância e após essa fase.[14] Medidas intermediárias estreitamente ligadas à leitura – por exemplo, conhecimento do som das letras – fornecem melhores indicações de bom desempenho em leitura do que competências mais gerais. Do mesmo modo, na área de operações com números, as competências iniciais associadas à Matemática com as quais a criança deve lidar na escola fornecem melhores indicações de bom desempenho e dificuldade nessa área.[15] Para uma análise inicial, é necessário identificar os principais preditores longitudinais de desempenho em Matemática.

Resultados de pesquisas recentes

Ter como referência as competências numéricas iniciais é importante para estabelecer as trajetórias de realização educacional da criança em relação à Matemática.[16,17] Dificuldades e deficiências em matemática têm suas raízes na compreensão insatisfatória de número.[18,19] Crianças com discalculia – uma forma grave de deficiência nessa área – caracterizam-se por *deficits* no reconhecimento e na comparação de números, bem como na contagem e na enumeração de conjuntos de objetos.[18]

Preditores longitudinais

Estudos longitudinais de curta duração – do início até o final da Educação Infantil – revelam que indicadores de habilidades em operações com números associados a contas, discriminação de quantidades e nomenclatura numérica são preditores de moderados a fortes da realização

acadêmica em Matemática.[20,21,22] Além disso, o desempenho nos indicadores de habilidades em operações com números em programas de educação infantil prediz o desempenho em medidas similares na idade pré-escolar.[23] Crianças de baixa renda ingressam na Educação Infantil bem defasadas em relação a seus pares de renda média, no que diz respeito aos indicadores de habilidades em operações com números, e essa lacuna não diminui ao longo do ano letivo.[12]

Estudos longitudinais abrangendo múltiplos momentos no tempo, do início da Educação Infantil até o final do terceiro ano do ensino fundamental, sugerem que a consciência da noção de número apoia a aprendizagem da Matemática complexa associada à computação e também à Matemática aplicada à resolução de problemas.[15,17,24,25] Operações com números aprendidas na Educação Infantil e que estão relacionadas a contas, comparações numéricas de grandezas, cálculo mental e aritmética predizem o nível de conhecimento matemático e a capacidade de realização do primeiro ao terceiro ano do ensino fundamental. A competência numérica inicial atua como mediadora do baixo nível de desempenho matemático dos alunos de baixa renda, em situação de alto risco. A competência com números prediz igualmente os resultados posteriores em Matemática, independentemente das variáveis de QI.[26] A competência pré-escolar em cálculos aritméticos simples, que envolvem adição e subtração, permite predizer com maior exatidão o desempenho matemático posterior. Uma vez que a maioria das crianças consegue adquirir competências numéricas iniciais,[4] os efeitos intermediários de tal aquisição fornecem o direcionamento para intervenções precoces.

Trajetórias fundamentais

Três trajetórias cognitivas subjacentes – quantitativa, linguística e espacial – contribuem de maneira independente para a aquisição de competências numéricas em programas de Educação Infantil.[27] As habilidades linguísticas constituem preditores específicos de nomenclatura numérica, ao passo que as habilidades quantitativas constituem preditores específicos de cálculo mental; a atenção espacial é um preditor distinto de ambos os tipos de habilidades iniciais em operações com números. Essas trajetórias precursoras estão distintamente relacionadas aos resultados alcançados em Matemática dois anos mais tarde – por exemplo, a trajetória linguística é precursora específica de conceitos de geometria e mensuração, o que não é o caso da trajetória quantitativa. Um modelo de trajetória pode explicar os motivos pelos quais alunos com um desempenho relativamente bom em determinada área da matemática não apresentam um desempenho satisfatório em outra.[28]

Lacunas de pesquisa

É preciso desenvolver e validar ferramentas para a análise de competências numéricas básicas em programas de educação infantil, para que possam ser utilizadas em escolas, clínicas e outros ambientes educacionais. Intervenções para crianças que apresentam dificuldades de aprendizagem em Matemática, ou que estão em risco de apresentar tais dificuldades, devem ser concebidas e avaliadas por meio de estudos randomizados. Especificamente, pesquisadores devem analisar de que modo os ganhos em áreas específicas da competência com números podem ser obtidos com maior nível de eficácia, e também se tais ganhos podem ser sustentados ao longo do tempo e generalizados à aprendizagem da Matemática como um todo. Além disso, é importante também diferenciar os métodos mais e menos eficazes para aprimorar a competência com números.

Conclusões

Dificuldades em Matemática são generalizadas e podem ter consequências para toda a vida. As competências numéricas básicas desenvolvem-se antes do primeiro ano do ensino fundamental e são preditores importantes de aquisições ou dificuldades acadêmicas em Matemática. Níveis mais altos de competência com números na Educação Infantil predizem desempenho significativo e substancial, em termos estatísticos, em avaliações matemáticas e em computação ao final do terceiro ano do ensino fundamental. A capacidade de associar representação numérica a relações e operações com números inteiros é particularmente importante. A competência com números depende da capacidade linguística – por exemplo, conhecer os nomes dos números – e também do conhecimento quantitativo e espacial – combinar e separar conjuntos. Embora os resultados de longo prazo para crianças de famílias de baixa renda sejam inferiores aos de crianças de renda média, a realização acadêmica em Matemática é moderada no que se refere às competências numéricas iniciais. Crianças de baixa renda ingressam na escola com relativamente poucas experiências associadas a números,[29] o que contribui para colocá-las em desvantagem. Esse efeito intermediário da competência com números sobre o desempenho em Matemática sugere a necessidade de enfatizá-la em programas de Educação Infantil. De modo geral, a compreensão inicial do número é crucial para definir a trajetória matemática ao longo do ciclo inicial do ensino fundamental.

Implicações para pais, serviços e políticas

Nas escolas atuais, raramente dificuldades e deficiências de aprendizagem da Matemática são identificadas antes do quarto ano do ensino fundamental. As intervenções precoces são muito menos frequentes do que no caso da leitura. Professores da Educação Infantil devem examinar os alunos para identificar dificuldades de operações com números, da mesma forma que os examinam com vistas à identificação precoce de dificuldades ligadas à alfabetização. Programas de Educação Infantil devem propiciar experiências e instrução em Matemática relacionadas a números, relações numéricas e operações com números.[4] Esse *núcleo numérico* deve enfatizar a lista de palavras relacionadas aos números, princípios de contas ligados a cardinalidade e correspondência biunívoca, comparação de tamanhos de conjuntos e união e separação de conjuntos. Listas de números e jogos de tabuleiro simples que também utilizam listas de números podem ajudar a criança a desenvolver a noção de quantidade.[30] Os responsáveis pelo desenvolvimento dos currículos para a primeira infância devem focalizar seus materiais nesses fundamentos numéricos. Crianças em escolas de comunidades de baixa renda encontram-se em situação de risco de apresentar dificuldades de aprendizagem em Matemática. Crianças de famílias de baixa renda ingressam na Educação Infantil mais defasadas que seus pares de renda média. Intervenções precoces podem ajudar todas as crianças a construir as bases de que necessitam para um bom desempenho em Matemática.

Referências

1. Barbaresi MJ, Katusic SK, Colligan RC, Weaver AL, Jacobsen SJ. Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976-1982, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics* 2005;5(5):281-289.
2. Shalev RS, Manor O, Gross-Tsur V. Developmental dyscalculia: A prospective six-year follow-up. *Developmental Medicine and Child Neurology*2005;47:121-125.
3. Clements DH, Sarama J. Early childhood mathematics learning. In: Lester JFK, ed. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Information Age Publishing; 2007:461-555.
4. Cross CT, Woods TA, Schweingruber H, National Research Council, Committee on Early Childhood Mathematics, eds. *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: National Academies Press; 2009.
5. Sadler PM, Tai RH. The two high-school pillars supporting college science. *Science* 2007;317:457-458.
6. National Mathematics Advisory Panel (NMAP). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education; 2008
7. Lubienski ST. A clash of social class cultures? Students' experiences in a discussion-intensive seventh-grade mathematics classroom.*The Elementary School Journal* 2000;100(4):377-403.
8. Geary DC, Hoard MK, Byrd-Craven J, Nugent L, Numtee C. Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development* 2007;78(4):1343-1359.
9. Berch DB. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities.*Journal of Learning Disabilities*2005;38(4):333-339.

10. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press; 1997.

11. Feigenson L, Dehaene S, Spelke E. Core systems of number. *TRENDS in Cognitive Sciences* 2004;8(7):307-314.

12. Jordan NC, Levine SC. Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews* 2009;15:60-68.

13. Case R, Griffin S. Child cognitive development: The role of central conceptual structures in the development of scientific and social thought. In: Hauert EA, ed. *Developmental psychology: Cognitive, perceptuo-motor, and neurological perspectives*. North-Holland: Elsevier; 1990: 1993-230.

14. Schatschneider C, Carlson CD, Francis DJ, Foorman BR, Fletcher JM. Relationship of rapid automatized naming and phonological awareness in early reading development: Implications for the double-digit hypothesis. *Journal of Learning Disabilities* 2002;35(3):245-256.

15. Jordan NC, Glutting J, Ramineni C. The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences* 2010;20:82-88.

16. Duncan GJ, Dowsett CJ, Classens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*2007;43(6):1428-1446.

17. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes. *Developmental Psychology* 2009;3(45):850-867.

18. Landerl K, Bevan A, Butterworth B. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8– 9-year-old students. *Cognition* 2004;93:99-125.

19. Mazzocco MM, Thompson RE. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research and Practice* 2005;20(3):142-155.

20. Clarke B, Shinn MR. A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement. *School Psychology Review* 2004;33(2):234-248.

21. Lembke E, Foegen A. Identifying early numeracy indicators in for kindergarten and first-grade students. *Learning Disabilities Research and Practice* 2009;24:2-20.

22. Methe SA, Hintze JM, Floyd RG. Validation and decision accuracy of early numeracy skill indicators. *School Psychology Review* 2008;37:359-373.

23. VanDerHeyden AM, Broussard C, Cooley A. Further development of measures of early math performance for preschoolers. *Journal of School Psychology* 2006:44:533-553.

24. Jordan NC, Kaplan D, Locuniak MN, Ramineni C. Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice* 2007;22(1):36-46.

25. Jordan NC, Kaplan D, Olah L, Locuniak MN. Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development* 2006;77:153-175.

26. Locuniak MN, Jordan NC. Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities* 2008;41(5):451-459.

27. LeFevre J, Fast L, Skwarchuk SL, Smith-Chant BL, Bisanz J, Kamawar D, Penner-Wilger M. Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child Development*. In press.

28. Mazzocco MM. Defining and differentiating Mathematical Learning Difficulties and Disabilities. In: Berch DB, Mazzocco MMM. eds. *Why is Math So Hard for Some Children? The Nature and Origins of Mathematical Learning Difficulties and Disabilities*. Baltimore, MD: Paul H. Brookes; 2007: 29-48

29. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Education Research Journal* 2008; 45(2), 443-494.

30. Ramani GB, Siegler RS. Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*2008;79:375-394.

Trajetórias de aprendizado da matemática na primeira infância: sequências de aquisição e de ensino

Douglas H. Clements, PhD, Julie Sarama, PhD

Graduate School of Education, University at Buffalo, EUA The State University of New York at Buffalo, EUA

Julho 2010

Introdução

As crianças seguem progressões desenvolvimentais naturais durante seu aprendizado e seu desenvolvimento. Para citar um exemplo simples, as crianças aprendem primeiro a engatinhar antes de andar, correr, saltitar e pular, com uma velocidade e uma destreza crescentes. Da mesma forma, elas seguem progressões desenvolvimentais naturais no aprendizado da matemática; elas aprendem os conceitos e as habilidades matemáticos à sua própria maneira. Quando os educadores entendem essas progressões no desenvolvimento e se baseiam nelas para estabelecer uma sequência de atividades, eles podem construir ambientes de aprendizado matematicamente ricos que são, ao mesmo tempo, apropriados e eficazes no plano do desenvolvimento. Esses caminhos do desenvolvimento constituem um dos elementos principais de uma *trajetória de aprendizado*.

Questões-chave de pesquisa

As trajetórias de aprendizado nos ajudam a responder a várias perguntas:

1. Quais são os objetivos que devemos fixar?
2. Onde devemos começar?
3. Como sabemos aonde ir depois?
4. Como chegamos lá?

Resultados de pesquisas recentes

©2009-2026 ABILIO | OPERAÇÕES COM NÚMEROS

Recentemente, os pesquisadores chegaram a um consenso básico a respeito da natureza das trajetórias de aprendizado.[1] As trajetórias de aprendizado possuem três partes: a) um objetivo matemático; b) um caminho desenvolvimental ao longo do qual as crianças se desenvolvem para atingir esse objetivo; e c) um conjunto de atividades ou de tarefas pedagógicas, correspondendo a cada um dos níveis de raciocínio nesse caminho, e que ajudam as crianças a desenvolver níveis mais altos de raciocínio. Vamos examinar cada uma dessas três partes.

Objetivos: as grandes ideias da matemática

A primeira parte de uma trajetória de aprendizado consiste em um *objetivo matemático*. Nossos objetivos são as grandes ideias da matemática – grupos de conceitos e de habilidades matematicamente centrais e coerentes, compatíveis com a forma de pensar das crianças, e geradores de um aprendizado futuro. Essas grandes ideias são tiradas de vários projetos importantes, incluindo aqueles do *National Council of Teachers of Mathematics e do National Math Panel*.[2,3,4] Por exemplo, uma grande ideia é que *a contagem pode ser utilizada para achar o número de objetos de um conjunto. Outra ideia seria que as formas geométricas podem ser descritas, analisadas, transformadas e compostas e decompostas em outras formas*. É importante compreender que existem várias grandes ideias e trajetórias de aprendizado desse tipo; dependendo da maneira de classificá-las, existem cerca de doze trajetórias.

Progressões do desenvolvimento: os caminhos do aprendizado

A segunda parte de uma trajetória de aprendizado consiste dos níveis de raciocínio, cada um mais sofisticado que o anterior, e que levam à realização do objetivo matemático. Em outras palavras, a progressão desenvolvimental segue um caminho típico seguido pelas crianças no desenvolvimento de sua compreensão e de suas habilidades relativas ao assunto matemático em questão. O desenvolvimento das habilidades em matemática começa no início da vida. Desde o nascimento, as crianças pequenas possuem certas competências de tipo matemático sobre números, percepção espacial e padrões.[5,6]

Contudo, as ideias das crianças pequenas e sua interpretação das situações são singularmente diferentes daquelas dos adultos. Por essa razão, os bons educadores da primeira infância devem tomar cuidado de não presumir que as crianças “enxergam” as situações, os problemas ou as soluções como os adultos fazem. Ao invés disso, os bons professores interpretam aquilo que a criança está fazendo e pensando: eles tentam enxergar a situação do ponto de vista da criança.

Da mesma forma, quando estão interagindo com as crianças, esses professores consideram também as tarefas pedagógicas e suas próprias ações do ponto de vista da criança. Isso faz com que o ensino para a primeira infância seja uma tarefa ao mesmo tempo exigente e gratificante.

As trajetórias de aprendizado que foram criadas no âmbito dos projetos *Building Blocks*[a] e *TRIAD*[b] fornecem identificações simples para cada nível de reflexão em cada trajetória de aprendizado. A tabela 1 descreve uma parte da trajetória de aprendizado para a contagem. A coluna Progressão desenvolvimental fornece um rótulo e uma descrição para cada nível, junto com um exemplo da maneira de pensar e de se comportar das crianças. É importante notar que as idades indicadas na primeira coluna são aproximadas. Sem experiência, algumas crianças podem estar anos atrás dessa idade média. Com uma educação de alta qualidade, as crianças ultrapassam de longe essas médias. A guisa de exemplo, crianças de 4 anos que participam do programa *Building Blocks* alcançam ou ultrapassam o nível "5 anos" na maioria das trajetórias de aprendizado, incluindo a contagem. (Para conhecer as trajetórias completas de aprendizado em todas as áreas da matemática, ver Clements & Sarama;[7] Sarama & Clements.[6] Esses estudos fazem também uma revisão dos importantes trabalhos de pesquisa nos quais todas as trajetórias de aprendizado estão baseadas.)

Tarefas pedagógicas: os caminhos do ensino

A terceira parte de uma trajetória de aprendizado consiste em um conjunto de tarefas pedagógicas, correspondendo a cada nível de raciocínio na progressão desenvolvimental. Essas tarefas são elaboradas para ajudar as crianças a aprender as ideias e habilidades necessárias para atingir esse nível de raciocínio. Isso quer dizer que, enquanto educadores, podemos recorrer a essas tarefas para promover a passagem das crianças de um nível para o próximo. A terceira coluna da tabela 1 indica exemplos de tarefas. (Aqui também, a trajetória de aprendizado completa descrita em Clements & Sarama[6,7] inclui não apenas todos os níveis de desenvolvimento mas também varias tarefas pedagógicas para cada nível).

Tabela 1. Exemplos tirados da Trajetória de Aprendizado Relativa à Contagem (todos os exemplos são tirados de Clements & Sarama,[8] Clements & Sarama,[7] Sarama & Clements[6]).

Idade	Progressão desenvolvimental	Tarefas pedagógicas

1 ano	**Précontador** *Verbal* Sem contagem em voz alta **Cantarolador** Verbal Cantarola os nomes dos números, às vezes de forma ininteligível.	Associar o nome dos números com quantidades e como componentes da sequência de contagem. Experiência repetida com a sequência de contagem em diferentes contextos.
2	**Declamador** *Verbal* Conta em voz alta com palavras separadas, não necessariamente na ordem correta.	Fornecer una experiência repetida e frequente com a sequência de contagem em diferentes conteztos. *Contar e correr* As crianças contam em voz alta junto com o computador (até 50) acrescentando carrinhos em uma pista de corrida, um de cada vez.
	Declamador (10) *Verbal* Conta até dez em voz alta, com *alguna* correspondência com objetos.	Fornecer uma experiência repetida e frequente com a sequência de contagem em diferentes contextos. *Contar e correr* As crianças contam em voz alta junto com o computador (até 50) acrescentando carrinhos em uma pista de corrida, um de cada vez.
3	**Combinador** Mantém uma correspondência um a um entre as palavras de contagem e os objetos (uma palavra para cada objeto), pelo menos para pequenos grupos de objetos enfilerados.	Contador de cozinha No computador, as crianças clicam em objetos, um de cada vez, enquanto que os números de um a dez estão sendo contados em voz alta. Por exemplo, elas clicam em pedaços de alimentos e uma bocada de cada é comida quando o pedaço é contado.

4	**Contador (números pequenos)** Conta corretamente até 5 objetos dispostos em linha, e responde à pergunta "quantos" com último número contado.	*Cubos na Caixa* Pedir para as crianças contar um pequeno conjunto de cubos. Colocá-los em uma caixa e fechar a tampa. Depois, perguntar à criança quantos cubos foram escondidos. Se a criança estiver pronta, pedir para escrever o número. Tirar os cubos da caixa e contá-los juntos para conferir.
	Produtor (números pequenos) Conta objetos até 5. Reconhece que a contagem é importante em situações onde um determinado número deve ser indicado.	*Contar movimentos* Durante o tempo de espera entre as transições, pedir para as crianças contar o número de vezes que você pula o bate nas maõs, ou faz algum outro movimento. Depois, pedir para elas repetirem esses movimentos o mesmo número de vezes. No início, contar os movimentos com as crianças.
5	**Contador e produtor (10+)** Sabe contar e conta em voz alta até 10 objetos sem erro, e vai além (até cerca de 30). Tem uma compreensão explícita da cardinalidade (como os números indicam a quantidade). Mantém o controle dos objetos que foram e não foram contados, mesmo se dispostos de forma diferente.	*Contar torres (mais de 10)* Para permitir que as crianças contem até 20 e mais, pedir para elas construírem torres com objetos como moedas. As crianças devem construir a torre mais alta possível, acrescentando moedas, porém sem endireitar aquelas que já estão na torre. O objetivo consiste em estimar e depois contar quantas moedas têm na torre mais alta. *Loja Dino 2* As crianças colocam a quantidade pedida de dinossauros em uma caixa.

Em resumo, as trajetórias de aprendizado descrevem os objetivos do aprendizado, os processos de raciocínio e de aprendizado das crianças de diferentes níveis, e as atividades de aprendizado das quais podem participar. Muitas vezes, as pessoas têm muitas perguntas a respeito das trajetórias de aprendizado.

Futuras orientações

Embora as trajetórias de aprendizado tenham se mostrado eficazes para os programas de matemática precoce e para o desenvolvimento profissional,[9,10] existem muito poucos estudos comparando as diferentes maneiras de implementá-las. Portanto, seu papel exato ainda deve ser estudado. Além disso, na primeira infância, várias trajetórias de aprendizado estão fundamentadas em um grande número de estudos, como aquelas relativas à contagem e à aritmética. Entretanto, outras como a elaboração de padrões e de medições, estão baseadas em um número de estudos muito menor. Mais ainda, existem poucas diretrizes relativas a muitos assuntos matemáticos mais sofisticados para o ensino de alunos mais velhos. Esses permanecem como desafios a enfrentar nessa área.

Conclusões

As trajetórias de aprendizado são promissoras para melhorar o desenvolvimento profissional e o ensino na área da matemática precoce. Por exemplo, os poucos professores que participaram de discussões mais aprofundadas em salas de aula sobre reforma da matemática não se viam passando por um programa de estudos, mas achavam que estavam ajudando os alunos a progredir de um nível de compreensão para o outro.[11] Além disso, os pesquisadores sugerem que o desenvolvimento profissional focado nas trajetórias de aprendizado aumenta não apenas os conhecimentos profissionais dos professores mas também a motivação e os resultados de seus alunos.[12,13,14] Em consequência, as trajetórias de aprendizado podem facilitar um ensino e um aprendizado apropriados no plano desenvolvimental para todas as crianças.

Nota dos autores:
Esse artigo está baseado em parte no trabalho realizado pela National Science Foundation, bolsa nº ESI-9730804 outorgada a D. H. Clements e J. Sarama "Building Blocks — Foundations for Mathematical Thinking, Pre-Kindergarten to Grade 2: Research-based Materials Development" e em pequena parte pelo Institute of Educational Sciences (U.S. Department of Education, dentro da Interagency Educational Research Initiative, ou IERI, uma colaboração do IES, da NSF e da NICHHD), bolsa nº R305K05157 outorgada a D. H. Clements, J. Sarama, e J. Lee, "Scaling Up

TRIAD: Teaching Early Mathematics for Understanding with Trajectories and Technologies." Qualquer opinião, descoberta, conclusão e recomendação expressas no presente documento são aquelas dos autores e não correspondem necessariamente à posição dos organismos de financiamento. O programa avaliado nessa pesquisa foi depois publicado pelos autores, que têm, portanto, um interesse direto nos resultados. Um auditor externo supervisionou a concepção da pesquisa, a coleta e a análise dos dados, e cinco pesquisadores confirmaram de forma independente os resultados e os procedimentos. Cada autor, listado em ordem alfabética, contribuiu de forma igual à pesquisa.

Referências

1. Clements DH, Sarama J, eds. Hypothetical learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning* 2004;6(2).
2. Clements DH, Conference Working Group. Part one: Major themes and recommendations. In: Clements DH, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2004: 1-72.
3. NCTM. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematic; 2006.
4. United States. National Mathematics Advisory Panel. *Foundations for success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington D.C.: U.S. Department of Education, Office of Planning, Evaluation and Policy Development; 2008.
5. Clements DH, Sarama J. Early childhood mathematics learning. In: Lester FK Jr, ed. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Information Age Publishing; 2007a: 461-555.
6. Sarama J, Clements DH. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Routledge; 2009.
7. Clements DH, Sarama J. *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge; 2009.
8. Clements DH, Sarama J. SRA real math building blocks. Teacher's resource guide pre K. Columbus, OH: SRA/McGraw-Hill; 2007b.
9. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal* 2008;45:443-494.
10. Sarama J, Clements DH, Starkey P, Klein A, Wakeley A. *Scaling up the implementation of a pre-kindergarten mathematics curriculum: Teaching for understanding with trajectories and technologies*. Journal of Research on Educational Effectiveness 2008;1:89-119.
11. Fuson KC, Carroll WM, Drueck JV. Achievement results for second and third graders using the Standards-based curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 2000;31:277-295.
12. Clarke BA. A shape is not defined by its shape: Developing young children's geometric understanding. *Journal of Australian Research in Early Childhood Education* 2004;11(2):110-127.
13. Fennema EH, Carpenter TP, Frank ML, Levi L, Jacobs VR, Empson SB. A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education* 1996;27:403-434.

14. Wright RJ, Martland J, Stafford AK, Stanger G. *Teaching number: Advancing children's skills and strategies* . London: Paul Chapman Publications/Sage; 2002.

Nota :

[a] Ver também o site *Building Blocks*. Disponível no endereço: http://www.ubbuildingblocks.org. Consultado em 3 de junho de 2010.

[b] Ver também o site *TRIAD*. Disponível no endereço: http://www.ubtriad.org. Consultado em 3 de junho de 2010.